Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 5 (100)

MATHÉMATIQUES

SUR UN PROBLÈME D'INTERPOLATION

Par M. JALTUNOVSKAJA (YALTOUNOVSKY)

(Présenté par S. N. Bernstein, de l'Académie, le 10. VI. 1936)

Il est bien connu que l'étude de l'interpolation de Newton est liée au problème de reconnaître si une fonction entière donnée $f(z)$ est développable en série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \prod_{\nu=0}^{n-1} (z - z_\nu), \tag{1}$$

a_n étant les coefficients de la formule de Newton, $z_0, z_1, z_2, \ldots$ les points d'interpolation.

Nous considérons un cas particulier de cette question générale, précisément le cas:

$$z_\nu = \left(\left[\frac{\nu}{p}\right] + 1\right)^{\frac{1}{\rho}} \omega_p^{\nu - \left[\frac{\nu}{p}\right] p},$$

p étant un nombre entier $\geqslant 1$, $\rho > 0$ arbitraire, $\omega_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$.

Pour $p = 1, \rho = 1$, (1) est la série d'interpolation de Newton, pour $p = 2, \rho = 1$, (1) ne diffère qu'insensiblement de la série d'interpolation de Stirling (1).

On peut démontrer les théorèmes suivants:

Théorème 1. Pour qu'une fonction entière $f(z)$ soit développable en série (1), z_ν étant donnés par les formules (2), il suffit que $f(z)$ soit d'ordre ρ et que l'inégalité

$$h(\varphi)^* = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\lg f(re^{i\varphi})}{r^\rho} \leqslant H_{p\rho}(\varphi)$$

* L'équation $r = h(\varphi)$ définit l'indicatrice de la croissance de la fonction entière donnée $f(z)$ d'ordre ρ (2).

soit satisfaite, où l'on a

$$H_{p\rho}(\varphi)=\begin{cases} R\displaystyle\int_{\sqrt[p]{2\cos p\varphi}}^{\infty}\frac{pt^{p-1-\rho}}{t^p-e^{-ip\varphi}}\,dt=R\int_{2\cos p\varphi}^{\infty}\frac{dt}{t^{\rho/p}(t-e^{-ip\varphi})}, & \cos p\varphi>0,\\ R\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{pt^{p-1-\rho}}{t^p-e^{-ip\varphi}}\,dt=R\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^{\rho/p}(t-e^{-ip\varphi})}, & \begin{matrix}\cos p\varphi<0 \text{ et } 0<\rho<p\\ \cos p\varphi=0 \text{ et } 0<\rho<2p\end{matrix}\\ \infty \text{ dans tous les autres cas.} \end{cases} \tag{3}$$

Théorème 2. Une fonction entière d'ordre ρ, satisfaisant à l'inégalité:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\lg f(re^{i\varphi})}{r^{\rho}}<H_{p\rho}(\varphi),$$

$H_{p\rho}(\varphi)$ étant définie par les équations (3) est développable en série (1), z_ν étant donnés par les formules (2).

La démonstration de ces deux théorèmes, ne présentant aucune difficulté, s'appuie fondamentalement sur l'évaluation asymptotique du polynôme

$$\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z^p}{\nu^{p/\rho}}\right).$$

Pour formuler ces théorèmes géométriquement, désignons par $G_{p\rho}$ le domaine de la variable complexe z défini par l'inégalité:

$$|z|\leqslant H_{p\rho}(\arg z).$$

Pour qu'une fonction entière $f(z)$ d'ordre ρ soit développable en série (1) il est nécessaire que l'indicatrice de la croissance de $f(z)$ n'ait aucun point en dehors de $G_{p\rho}$ et il suffit que cette indicatrice soit entièrement dans l'intérieur du domaine $G_{p\rho}$.

L'étude de la forme du domaine $G_{p\rho}$ n'est pas difficile. Considérons la fonction

$$H_\lambda(\varphi)=\begin{cases} R\displaystyle\int_{2\cos\varphi}^{\infty}\frac{dt}{t^\lambda(t-e^{-i\varphi})}, & \cos\varphi>0;\\ R\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^\lambda(t-e^{-i\varphi})}, & \begin{matrix}\cos\varphi<0,\ \lambda<1,\\ \cos\varphi=0,\ \lambda<2;\end{matrix}\\ \infty & \begin{matrix}\cos\varphi<0,\ \lambda\geqslant 1,\\ \cos\varphi=0,\ \lambda\geqslant 2.\end{matrix}\end{cases}$$

Les formules (3) nous donnent évidemment

$$H_{p\rho}(\varphi)=H_{\rho/p}(p\varphi).$$

Par conséquent, l'étude des courbes $r = H_{p\rho}(\varphi)$ se réduit à l'étude des courbes $r = H_\lambda(\varphi)$.

Une analyse plus précise nous montre qu'il s'y présente les cas suivants:

1) $\rho < p$.

Les courbes

$$r = H_{p\rho}(\varphi) \tag{4}$$

sont formées par $2p$ arcs de courbes analytiques se joignant aux points dont les coordonnées polaires sont

$$\varphi = \frac{2k+1}{2p}\pi, \quad r = \frac{\pi}{2\sin\frac{\rho\pi}{2p}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2p-1). \tag{5}$$

Les fonctions $H_{p\rho}(\varphi)$ et $H'_{p\rho}(\varphi)$ sont continues, $H_{p\rho}(\varphi)$ étant croissante dans l'intervalle $\left(\frac{2k\pi}{p}, \frac{(2k+1)\pi}{p}\right)$ et décroissante dans l'intervalle

$$\left(\frac{(2k+1)\pi}{p}, \frac{(2k+2)\pi}{p}\right)(k = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Toutes les courbes (4) sont situées entre deux cercles concentriques de rayons:

$$r = r_{\min} = \int_2^\infty \frac{dt}{t^{\rho/p}(t-1)} \quad \text{et} \quad r = r_{\max} = \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\rho/p}(t-1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi\rho}{p}}$$

et touchent l'un et l'autre en p points.

2) $p \leqslant \rho < 2p$.

Le domaine $G_{p\rho}$ n'est borné que de p arcs situés dans les angles:

$$\frac{4k-1}{2p}\pi < \varphi < \frac{4k+1}{2p}\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1),$$

angentes aux côtés des angles dans les points

$$\varphi = \frac{2l-1}{2p}\pi; \quad (l = 0, 1, \ldots, 2p-1), \; r = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\rho}{2p}},$$

et de côtés de ces angles.

Hors de ces angles le domaine $G_{p\rho}$ s'étend vers l'infini.

3) $2p \leqslant \rho < 3p$.

Le domaine $G_{p\rho}$ est borné de p arcs situés dans l'intérieur de ces angles mais s'approchant asymptotiquement de leurs côtés.

4) $\rho = 3p$.

Les courbes bornant le domaine $G_{p\varrho}$ s'approchent asymptotiquement des droites parallèles aux côtés des angles correspondants dont elles sont éloignées de $\frac{3}{8p}$.

5) $\varrho > 3p$.

Les courbes bornant le domaine $G_{p\varrho}$ s'éloignent des côtés des angles avec φ tendant vers $\frac{2k+1}{2p}\pi$ $\quad (k = 0, 1, \ldots, p-1)$.

On peut remarquer que le rayon du cercle

$$r = \int_2^\infty \frac{dt}{t^{\varrho/p}(t-1)},$$

qui est tangent chaque fois aux bornes du domaine $G_{p\varrho}$, décroît monotonement tendant vers zéro avec l'accroissement de ϱ/p.

Institut de Mathématiques
de l'Université de Moscou.

Manuscrit reçu
le 10. VI. 1936.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] N. E. Nörlund, Ann. Éc. Norm., 3 série, **39**, 343—403 (1922); ibid. **40**, 35—54 (1923). Voire encore: Leçons sur les séries d'interpolation, Paris (1926). [2] G. Polya, Math. Ztschr., **29**, 549—640 (1929).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 5 (100)

MATHEMATIK

EXISTENZTHEOREM DER NICHTLINEAREN INTEGRALGLEICHUNGEN

Von N. S. SMIRNOV

(Vorgelegt von I. M. Vinogradow, Mitglied der Akademie, d. 20. IV. 1936)

Seit Birkhoff und Kellog (1) wurde für die Feststellung der Tatsache der Existenz von Auflösungen der Gleichungen wiederholt der Fixpunktsatz zur kontinuierlichen Abbildung einer Menge in sich verwendet. In der Arbeit von V. V. Niemytzki (2) werden die Gleichungen der folgenden Art behandelt:

$$u(x) = \int_G K(x, y) f(y, u(y))\, dy, \qquad x, y \in G.$$

In diesen Gleichungen ist f eine kontinuierliche Funktion von $u(y)$, wobei angenommen wird, dass die Funktion f quadratisch summierbar ist, wenn $u(y)$ bei der gegebenen Zahl C die Ungleichung

$$\int_G u^2(x)\, dx \leqslant C$$

erfüllt. $K(x, y)$ ist eine quadratisch summierbare Funktion.

Die Methoden von V. V. Niemytzki können leicht zur Feststellung des Existenztheorems der Integralgleichungen einer recht allgemeinen Art:

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{G_i} K_i\big((x, y_1, y_2, \ldots, y_i\, u(y_1), \ldots, u(y_i)\big)\, d\tau_i, \qquad (1)$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad d\tau_i = dy_1\, dy_2 \ldots dy_i$$

verwendet werden. In der eben gegebenen Formel ist G_i ein i-dimensionaler Würfel, dessen Mass 1 ist. Die vorliegende Notiz ist einigen Ergebnissen des Studiums über die Gleichungen (1) gewidmet.

Formulieren wir in erster Linie den Satz, welcher ganz analog dem 2. Lemma Niemytzki's bewiesen wird. Dieses 2. Lemma stellt einen speziellen Fall unseres Lemmas dar.

Lemma. *Nehmen wir an, dass die Funktion:*

$$H(x, y_1, y_2, \ldots, y_i, u(y_1), u(y_2), \ldots, u(y_i))$$

stetig in bezug auf alle $u(y_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant i)$ *ist, welche die Ungleichung*

$$\int_0^1 u^2(x)\, dx \leqslant C \qquad (2)$$

erfüllen (C *ist eine gegebene Konstante*). *Und für alle diese* $u(y)$ *ist die folgende Ungleichung*

$$\sup H^2(x, y_1, y_2, \ldots, y_i, u(y_1), u(y_2), \ldots, u(y_i)) < L(x, y_1, y_2, \ldots, y_i),$$

richtig, wobei L *eine quadratisch summierbare Funktion für* $0 \leqslant x, y_k \leqslant 1$ $(1 \leqslant k \leqslant i)$ *ist.*

Dann geht aus der Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u, u_n) = + \sqrt{\int_0^1 (u - u_n)^2 dx} = 0$$

hervor, dass

$\lim_{n\to\infty} \rho [H(x, y_1, \ldots y_i, u(y_1), \ldots, u(y_i)), \quad H(x, y_1, \ldots, y_i, u_n(y_1), \ldots, u_n(y_i))] = 0.$

Der Existenzbeweis der Auflösung der Integralgleichung (1) *stützt sich auf zwei folgende Hilfsätze.*

Hilfsatz 1. *Der Operator*

$$N(u) = \sum_{i=0} \int_{G_i} K_i(x, y_1, \ldots, y_i, u(y_1), \ldots, u(y_i))\, d\tau_i$$

ist kompakt im Hilbert'schen Raum betreffs der Funktionenmenge $\{u(x)\}$, *welche durch die Ungleichung*

$$\int_0^1 u^2(x)\, dx \leqslant C$$

charakterisiert wird, wenn die Ungleichung

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \int_{G_i} K_i^2 d\tau_i\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant A$$

für alle Funktionen $u(y)$ *der betreffenden Funktionenmenge erfüllbar ist* (A *ist eine Konstante*).

Beweis. A. N. Kolmogoroff hat [3]) den folgenden Satz bewiesen: die notwendige und hinreichende Bedingung für die Kompaktheit der Menge der im Hilbert'schen Raum beschränkten Funktionen [d. h. bei der Erfüllung der Bedingung (2)] ist die Erfüllung der folgenden Bedingungen:

1. Es existiert eine Konstante C, welche für alle Funktionen dieser Menge die Ungleichung

$$\int_F u^2(x)\, dx \leqslant C$$

erfüllt.

2. Bei gegebenem $\delta > 0$ findet man ein solches $\varepsilon > 0$, dass

$$\int_F \left[\frac{1}{V(\varepsilon)} \int_{S(x,\varepsilon)} f(t)\, d\sigma - f(x) \right]^2 dx \leqslant \delta,$$

wo $S(x, \varepsilon)$ die Sphäre mit dem Radius ε und $V(\varepsilon)$ das Volumen dieser Sphäre sind.

Mittels dieses Satzes wird unser Hilfsatz 1 leicht bewiesen. Bei der Transformation der Funktionenmenge $\{u\}$ durch den Operator $N(u)$ erhält man eine neue Funktionenmenge $\{\varphi\}$. Beweisen wir jetzt, dass diese Funktionenmenge im Hilbert'schen Raum beschränkt ist:

$$\int_0^1 \varphi^2(x)\, dx = \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^{\infty} \int_{G_i} K_i(x, y_1, \ldots, y_i, u(y_1), \ldots, u(y_i))\, d\tau_i \right]^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \int_{G_i} K_i\, d\tau_i \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{G_k} K_k d\tau_k \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \int_{G_i} K_i^2 d\tau_i\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \int_{G_k} K_k^2\, d\tau_k\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] = A^2.$$

Damit wird die 1. Bedingung vom Kolmogoroff'schen Satz erfüllt.

Beweisen wir die Erfüllung der 2. Bedingung Kolmogoroff's, wofür wir die Differenz

$$\int_0^1 [\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)]^2\, dx = \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^{\infty} \int_{G_i} [K_{i\varepsilon} - K_i]\, d\tau_i \right]^2 dx$$

betrachten. Hier ist zur Abkürzung angenommen, dass

$$K_{i\varepsilon} = \frac{1}{V(\varepsilon)} \int_{S(x,\varepsilon)} K_i\, d\sigma.$$

Bei der Betrachtung der letztangeführten Gleichung findet man, dass

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=0}^{\infty} \int_{G_i} [K_{i\varepsilon} - K_i]\, d\tau_i \right]^2 dx \leqslant \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \int_{G_i} [K_{i\varepsilon} - K_i]^2\, d\tau_i\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(2 \int_0^1 \int_{G_i} [K_{i\varepsilon}^2 + K_i^2]\, d\tau_i\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 < \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(4 \int_0^1 \int_{G_i} K_i^2\, d\tau_i\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 =$$

$$= \left[2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \int_{G_i} K_i^2\, d\tau_i\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = (2A)^2,$$

woraus hervorgeht, dass die summierbaren Funktionen $R_i(y_1, y_2, \ldots, y_i)$ existieren, welche die Ungleichungen

$$\int_0^1 K_i^2(x, y_1, \ldots, y_i, u(y_1), \ldots, u(y_i))\, dx < R_i(y_1, y_2, \ldots, y_i)$$

erfüllen. Aus dem Kolmogoroff'schen Satz ist also klar, dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 [K_{i\varepsilon} - K_i]^2\, dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

woraus wir wegen der gleichmässigen (relativ i) Konvergenz dieser Grössen gegen Null schliessen:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 (\varphi_\varepsilon - \varphi)^2\, dx \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \left[\int_0^1 \int_{G_i} [K_{i\varepsilon} - K_i]^2\, d\tau_i\, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 =$$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \left[\int_{G_i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 [K_{i\varepsilon} - K_i]^2\, dx\, d\tau_i \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 = 0.$$

Daher wird die 2. Bedingung von Kolmogoroff und folglich unser Hilfsatz erfüllt.

Hilfsatz 2. *Der operator $N(u)$ ist im Hilbert'schen Raum in bezug auf die der Bedingung (2) genügenden Funktionen stetig, wenn zwei konstante Zahlen A und D existieren, die die Bedingungen*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \int_{G_i} K_i^2\, d\tau_i\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = A$$

$$\rho\,[K_i(x, y_1, \ldots, y_i, u(y_1), \ldots, u(y_i)),\quad K_i(x, y_1, \ldots, y_i, u_n(y_1), \ldots, u_n(y_i))] \leqslant$$

$$\leqslant D_i\, \rho(u, u_n),\quad \sum_{i=1}^{\infty} D_i \leqslant D$$

erfüllen.

Beweis. Wenn $\{u_n\}$ eine gegen u konvergierende Folge ist, so

$$\lim_{n\to\infty} \rho^2(u, u_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 [u(x) - u_n(x)]^2\, dx = 0.$$

Betrachten wir $\rho(N(u), N(u_n))$:

$$\rho^2(N(u), N(u_n)) = \int_0^1 \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \int_{G_i} [K_i(x, y_1, \ldots, y_i, u(y_1), \ldots, u(y_i)) - \right.$$

$$\left. - K_i(x, y_1, \ldots, y_i, u(y_1), \ldots, u(y_i))]\, d\tau_i \right\}^2 dx \leqslant \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left[\int_0^1 \int_{G_i} [K_i(u) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - K_i(u_n)]^2\, d\tau_i\, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} D_i \rho(u, u_n) \right)^2 = D^2 \rho^2(u, u_n).$$

Aus dem oben angegebenen Lemma folgt, dass man aus der Bedingung $\lim_{n\to\infty} \rho^2(u, u_n) = 0$ erhält: $\lim_{n\to\infty} \rho^2(N(u), N(u_n)) = 0$, was zu beweisen war.

Beweisen wir jetzt den folgenden Satz.

Satz. *Die Integralgleichung* (1) *ist auflösbar, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt werden:*

1) *Es existiert eine solche Zahl* A, *dass*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \int_{G_i} K_i^2\, d\tau_i\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = A,$$

für die Bedingung (2) *erfüllenden* $\{u\}$.

2) *Es existiert eine solche Zahl* D, *dass*

$$\rho(K_i(u), K_i(u_n)) \leqslant D_i \rho(u, u_n); \quad \sum_{i=1}^{\infty} D_i \leqslant D.$$

3) $$A^2 \leqslant C.$$

Beweis. Aus den Bedingungen 1) und 2) folgt, dass der Operator $N(u)$ kompakt und stetig ist. Beweisen wir jetzt, dass $N(u)$ die Menge $\{u\}$ in ihren Teil

$$\int_0^1 [N(u)]^2\, dx = \int_0^1 \varphi^2(x)\, dx = \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^{\infty} \int_{G_i} K_i\, d\tau_i \right]^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \int_{G_i} K_i^2 d\tau_i\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = A^2 \leqslant C$$

transformiert. Aus dem Schauder'schen Satz[4] erhält man den Beweis der Existenz der Fixpunkte bei der Transformation mit Hilfe des Operators $N(u)$, was der Existenz der Lösung der Integralgleichung (1) äquivalent ist.

Institut für Mathematik und Mechanik
Staatsuniversität. Leningrad.

Eingegangen
d. 20. IV. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

[1] Birkhoff a. Kellog, Trans. Amer. Math. Soc., **23** (1922). [2] Niemytzki, Матем. сборн., **41**, № 3 (1934). [3] Kolmogoroff, Götting. Nachr. (1931). [4] Schauder, Studia Math., **2** (1930).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 5 (100)

ASTRONOMY

THE OMPILATION OF A FUNDAMENTAL CATALOGUE OF RIGHT ASCENSIONS

By B. V. NUMEROV, Corresponding Member of the Academy

We suggest that three rings should be selected in compiling a catalogue of faint stars. The first is, a polar ring, with a declination of about 80° comprising 24 stars; the second, a zenith ring of 72 stars, and the third, an equatorial ring of 144 stars.

By selecting stars of magnitudes 7.5 to 9.0, we can compile a list of stars that would admit of a uniform distribution of the stars of all the three groups. In addition to the above three groups, the catalogue will include stars uniformly distributed in the sky, but the three main groups of stars, the polar, the zenith and the equatorial, must be constantly and systematically observed.

By adopting the chain method of the zenith telescope we can construct a system of the right ascensions of the zenith ring if we subdivide the zenith stars into hourly and bihourly groups. In constructing our system of zenith stars we may make use of the approximate values of the azimuth of the instrument, as obtained from observations of polar stars.

We shall now proceed to deduce equations for determining the azimuth of the instrument and the system of polar stars with regard to the system of zenith stars. With this end in view, we shall consider four stars, whereof two polar and two zenith ones, the two stars of a pair being closely related as to right ascension and differing by 12 hours. Let us denote by α_1, and α_2 respectively the right ascensions of the first and the second zenith star differing by 12 hours. Let us further denote by α_3 the right ascension of that polar star which is the nearest to star α_1, and by α_4 the right ascension of another polar star, which happens to be the nearest to star α_2. Near the culmination of star α_1, we are able to write the following two equations:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_3 - \alpha_1 &= \Delta_3 + Aa, \\ \alpha_4 - \alpha_1 &= \Delta_4 + Ba. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

The transit instrument will give us the differences between the right ascensions of the polar stars and that of the first zenith star, these differences comprising members with the azimuths a of the instrument.

The coefficients A and B are determined from known formulas in the upper and lower culminations

$$A = \sin(\varphi - \delta)\sec\delta, \qquad B = \sin(\varphi + \delta)\sec\delta. \tag{2}$$

During the culmination of the second star (either the same evening or in half a year's time) we can write, for the difference of the coordinates, two new equations respectively, comprising the new azimuth of the instrument:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_4 - \alpha_2 &= \Delta_4' + Aa', \\ \alpha_3 - \alpha_2 &= \Delta_3' + Ba'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

After subtracting equation (3) from equations (1) and (2), we can write two equations for the determination of the azimuths a and a':

$$\left.\begin{aligned} Ba - Aa' = c &= \alpha_2 - \alpha_1 + \Delta_4' - \Delta_4, \\ Aa - Ba' = c' &= \alpha_2 - \alpha_1 + \Delta_3' - \Delta_3. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

We proceed first of all to the direct solution of the last equations and find:

$$a = cn - c'm, \quad a' = cm - c'n, \tag{5}$$

where, for the sake of brevity, it is assumed that

$$m = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{2\sin 2\varphi \sin\delta}, \qquad n = \frac{\sin(\varphi + \delta)}{2\sin 2\varphi \sin\delta}. \tag{6}$$

On the other hand, after subtracting and adding equations (4) we find:

$$\left.\begin{aligned} 2\cos\varphi \operatorname{tg}\delta(a + a') &= \Delta_4' + \Delta_3 - \Delta_3' - \Delta_4, \\ 2\sin\varphi(a - a') &= 2(\alpha_2 - \alpha_1) + \Delta_4' - \Delta_3 + \Delta_3' - \Delta_4. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

The sum of the azimuths of the instrument is not affected by the difference in the ascensions of zenith stars, but is affected by the systematic observation errors in the upper and the lower culminations.

The difference of the azimuths depends upon the system of right ascensions of zenith stars, but is free from the systematic errors of the culminations. In the spring, autumn and winter periods we may observe both star α_1 and star α_2 in the upper culmination. By controlling in this case the azimuth of the instrument with the meridian marks, we may, using equation (7), calculate the absolute azimuth of the instrument for both observations and have an additional condition for controlling the system of zenith stars.

After having determined the absolute azimuth of the instrument from formulas (5) or (7), we may, using equations (1) and (3), construct a system of polar stars in relation to the zenith ring.

Similarly, if we know the absolute azimuth of the instrument, we may construct a system of equatorial stars.

The error implied in the determination of the azimuth from formulas (5) is:

$$\varepsilon(a) = \sqrt{\varepsilon_1^2 \operatorname{cosec}^2\varphi + 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)(m^2 + n^2)}, \tag{8}$$

where ε denotes the mean quadratic error in the difference $(\alpha_2 - \alpha_1)$ of the system of zenith stars. ε_1, ε_2 denote the errors in the transit of the zenith and the polar star. In the classical method of determining the azimuth from the motion of the Polar Star we obtain an azimuth with a lesser mean quadratic error than this follows from formula (8). In this case, however, we can determine the azimuth only once in 24 hours, and, in the intervals between the observations of α of Ursa Major, have to make use of meridian mark readings, assuming the meridian marks to have no diurnal variations. Moreover, we are obliged to extrapolate and rely upon the invariability of the meridian marks in our daylight observations of the stars and the Sun.

It is therefore imperative, in constructing the system of fundamental faint stars, and in determining the orientation of the system from the minor planets, to test the above method of the hourly determination of the absolute azimuth of the instrument with the help of the ring of zenith and polar faint stars.

Astronomical Institute,
Leningrad.

Received
23. V. 1936.

REFERENCES

[1] Б. В. Нумеров, Бюлл. Астр. ин-та, № 32 (1933) [2] Dirk Brouwer, Astr. Journ., № 1022 (1935). [3] B. V. Numerov, J. Obs., XVIII, 4 (1935) [4] W. J. Eckert, Astr. Journ., № 1034 (1935). [5] B. V. Numerov, J. Obs., XVIII, 9—10 (1935); Астр. журн., XII, 5 (1935) [6] Б. В. Нумеров и В. С. Мошкова, Астр. журн., XIII, № 1 (1936). [7] Б. В. Нумеров, Астр. журн. (1935); Astr. Journ. (1936). [8] B. V. Numerov, C. R. Acad. Sci. URSS, III, № 5 (1935); Астр. журн. XII, 4 (1935).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 5 (100)

CELESTIAL MECHANICS

ON ONE PARTICULAR CASE OF MOTION IN THE RESISTING MEDIUM WITH A VARIABLE MASS

By G. DUBOŠIN

(Communicated by V. G. Fesenkov, Member of the Academy, 26. V. 1936)

In the present note we are going to discuss an integrable case of a dynamical problem which seems to us to be of great importance for astronomy. It is the problem of motion of a material point under the influence of the force of gravitation of some immobile centre, of the force of gravitation of the atmosphere surrounding this body, and of the force of resistance offered by the atmosphere to the motion taking place in it. Besides, it is assumed that the mass of the central body and the density of the atmosphere are the given continued functions of time. If the atmosphere has a spherical symmetry relative to the immobile centre, then the motion of the material point is plane. Assuming that the resisting force of the atmosphere varies proportionally to the density of the atmosphere and the velocity of the point, we can write the differential equations of motion in the following way:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu(t)}{r^3}\,x + \frac{4}{3}\,\pi\rho(t)\cdot x + \lambda\rho(t)\,\frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu(t)}{r^3}\,y + \frac{4}{3}\,\pi\rho(t)\cdot y + \lambda\rho(t)\,\frac{dy}{dt} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

where $\mu(t)$ is the mass of the immobile centre, $\rho(t)$ is the density of the atmosphere, and λ is a constant.

Whatever are the functions $\mu(t)$ and $\rho(t)$, System (1) has always one first integral, analoguous to that of the areas in the classical problem of two bodies.

Introducing the polar coordinates by means of the formulae:

$$x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega,$$

we can write this integral in the form:

$$r^2\frac{d\omega}{dt} = c\cdot e^{-\lambda\int_0^t \rho(t)dt}, \qquad (2)$$

where c is an arbitrary constant.

Formula (2) shows that the sectorial velocity of the moving point is not constant, as it is in the classical problem, but is a monotonously decreasing function of time. By means of Equation (2), it is easy to deduce from System (1) a differential equation for the radius-vector r. This equation is as follows:

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \lambda\rho(t)\frac{dr}{dt} + \frac{4}{3}\pi\rho(t)\cdot r + \frac{\mu(t)}{r^2} - \frac{c^2}{r^3}e^{-2\lambda\int_0^t \rho(t)dt} = 0, \tag{3}$$

and the solution of our problem depends on the integration of this single equation.

At arbitrary functions $\mu(t)$ and $\rho(t)$, Equation (3), of course, cannot be integrated. Yet, it is possible to point out at least one particular case when the integration of Equation (3) is reduced to quadratures. In order to get this case, let us transform Equation (3) by means of substitution

$$d\tau = dt\cdot e^{-\lambda\int_0^t \rho(t)dt}, \tag{4}$$

which will lead us to the equation

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} - \frac{c^2}{r^3} + \left[\frac{4}{3}\pi\rho(t)\cdot r + \frac{\mu(t)}{r^2}\right]e^{2\lambda\int_0^t \rho(t)dt} = 0. \tag{5}$$

Let us then choose the functions $\mu(t)$ and $\rho(t)$ so that they might satisfy the conditions:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-2\lambda\int_0^t \rho(t)dt}, \quad \mu(t) = \mu_0 e^{-2\lambda\int_0^t \rho(t)dt}, \tag{6}$$

where ρ_0 and μ_0 are constants, whose physical meaning is clear.

Equation (5) will then reduce to the form:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} - \frac{c^2}{r^3} + \mu_1\cdot r + \frac{\mu_0}{r^2} = 0, \tag{7}$$

where

$$\mu_1 = \frac{4}{3}\pi\rho_0.$$

The latter equation may be easily integrated by means of elliptical functions.

Before integration, let us determine the functions $\rho(t)$ and $\mu(t)$, and find the relation between the new independent variable τ and the time. From Formulae (6) we easily get:

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{1+2\lambda\rho_0 t}, \qquad \mu(t) = \frac{\mu_0}{1+2\lambda\rho_0 t}, \tag{8}$$

and from Formula (4), assuming $\tau = 0$ at $t = 0$, we get:

$$\tau = \frac{1}{\lambda\rho_0}\left(\sqrt{1+2\lambda\rho_0 t} - 1\right). \tag{9}$$

The second of Formulae (8) is a particular case of the law of I. Meschersky [1], and may, at certain conditions, as shown by D. Jeans, describe the decrease in mass of a star due to radiation.

Now let us turn to the integration of Equation (7). Having written this equation in the form:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\mu_1 \cdot r - \frac{\mu_0}{r^2} + \frac{c^2}{r^3} = \Psi(r), \qquad (10)$$

we shall instantly find its first integral:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -\mu_1 r^2 + \frac{2\mu_0}{r} - \frac{c^2}{r^2} + h = \Phi(r), \qquad (11)$$

where h is an arbitrary constant.

From the above equation we easily get:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\Phi(r)}} = \tau, \qquad (12)$$

(where r_0 is the initial value of r), which determines the radius-vector r as an elliptic function of τ. Analysing the function $\Phi(r)$, it is easy to find that the equation $\Phi(r) = 0$, at any values of the constants c and h, has always only two real positive roots, r_1 and r_2, one of which is smaller than r_0, while the other is greater, if $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_{\tau=0} \neq 0$. An interesting conclusion may be drawn herefrom. Indeed, Equation (11) shows that the radius-vector of the point always remains between two constant limits, r_1 and r_2, and that the motion, consequently, is always stable in the sense of Laplace.

If $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0$, then $r_1 = r_2 = r_0$, and the latter value is also the root of the equation $\Psi(r) = 0$, and, consequently, this case corresponds to the circular motion of the point.

Let us also note that at $c = 0$, $r_1 = 0$, and that this case corresponds to the rectilinear motion of the point.

Eliminating the variable τ from Equation (11) and from the equation:

$$r^2 \frac{d\omega}{d\tau} = c,$$

we get the differential equation of the trajectory. This equation will be written in the form:

$$\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 = \frac{r^4 \Phi(r)}{c^2},$$

whence it follows that r is a periodic function of ω. It means that the trajectory of the point is a closed curve circling between two concentric circles with the radii r_1 and r_2. Yet, evidently, the motion will never be periodic in time.

The latter conclusion clearly follows from Formula (9).

Now let us investigate the question of the stability, in the sense of Liapounoff, of the circular motion. It is nearly evident that this question should be answered in the affirmative. The strict proof of this is as follows: let r_0 be the radius of a circular orbit, that is, a value satisfying the condition:

$$\Psi(r_0) = 0.$$

Putting

$$r = r_0 + \xi,$$

we get from (10) the differential equation of the disturbed motion in the form:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \Psi(r_0 + \xi), \tag{13}$$

the right-hand part of which is a holomorphic function of ξ vanishing at $\xi = 0$.

The stability of the circular motion in relation to quantities r and $\frac{dr}{d\tau}$ depends first of all on the sign of the quantity $\Psi'(r_0)$. But it is easy to see that

$$\Psi'(r_0) = -4\mu_1 - \frac{\mu_0}{r_0^3},$$

or is always negative. Therefore, the necessary condition of stability is satisfied. But in our case this condition is also sufficient, because equation (13) has the integral

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \Phi(r_0 + \xi) = h,$$

the left-hand part of which is a holomorphic function of ξ and $\frac{d\xi}{d\tau}$ vanishing at $\xi = \frac{d\xi}{d\tau} = 0$. Thus we may apply the well-known theorem of A. Liapounoff.

In conclusion we must point out that the analysed problem is reduced to quadratures whatever may be the law of gravitation, the only condition being that the force of gravitation should depend only on distance.

State Astronomical Institute.
Moscow.

Received
26. V. 1936.

REFERENCES

[1] Meschersky, Astr. Nach., **159**, 3807 (1902). [2] A. Liapounoff, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, t. XI, ch. II, par. 38 (1907).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 5 (100)

PHYSIK

BEITRAG ZUR FRAGE ÜBER DAS VERSCHWINDEN DER SPEKTRALLINIEN IN STARKEN ELEKTRISCHEN FELDERN

Von W. FABRIKANT

(Vorgelegt von S. I. Wawilow, Mitglied der Akademie, d. 7. VI. 1936)

Lanczos (1) schlug im Jahre 1931 eine wellenmechanische Deutung für das Phänomen der Intensitätsschwächung bzw. des Verschwindens der Spektrallinien in hohen elektrischen Feldern vor.

Dieses Phänomen wurde im Jahre 1930 von Rausch von Traubenberg und seinen Mitarbeitern (2) an einzelnen π-Komponenten der Starkschen Aufspaltung der Wasserstofflinien experimentell festgestellt.

Als Ursache für die Intensitätsschwächung der Emissionslinien hatte Lanczos die unmittelbare Ionisation der Atome durch das elektrische Feld hervorgehoben. Vom Standpunkt der Wellenmechanik hat die Ionisationswahrscheinlichkeit einen endlichen Wert schon bei Feldstärken, die unterhalb des für die Ionisation nach klassischen Vorstellungen erforderlichen (3) Gradienten liegen (Durchsichtigkeit der Barriere (des «Potentialberges»).

Ist nun $2\varkappa$ die Ionisationswahrscheinlichkeit, 2α—die Wahrscheinlichkeit einer spontanen Ausstrahlung, so lässt sich die Intensität I der Emissionslinien in Gegenwart eines Feldes folgendermassen ausdrücken

$$I_0 = \frac{I_0}{1 + \frac{\varkappa}{\alpha}}, \qquad (50)\,(1)$$

wo I_0 die ursprüngliche Intensität bedeutet.

Durch die Lanczossche Teorie wird es ermöglicht, die $\varkappa$-Werte für verschiedene Niveaus und Gradienten des Feldes zu berechnen. Lanczos beschränkt sich jedoch auf die Bestimmung von Gradienten, die erforderlich sind, um ein Verschwinden der Emissionslinien herbeizuführen, und vergleicht sodann die von ihm ermittelten Werte mit den experimentellen Befunden (siehe Tabelle). Lanczos weist darauf hin, dass das Verschwinden der Emissionslinien bei Gradienten eintritt, die den wellenmechanischen Berechnungen Genüge leisten, und dass diese Gradienten unterhalb der auf Grund klassischer Verstellungen berechneten liegen.

Bethe (4) schliesst sich in seinen Ausführungen betreffs dieser Frage den Anschauungen Lanczos an und erläutert die Behauptung von einem scharfen Unterschied, der angeblich zwischen den Ergebnissen der klassischen und wellenmechanischen Berechnungen besteht, durch eine spezielle Berechnung.

Condon und Shortley (5) legen in einem neuen Lehrbuch für Spektroskopie die Lanczos'sche Arbeit ohne jeglichen Vorbehalt dar.

In der vorliegenden Notiz möchten wir die Aufmerksamkeit auf folgende zwei Umstände lenken: 1) Lanczos gelangt zu seinen zahlenmässigen Ergebnissen unter Benutzung einer unrichtigen Annahme; 2) eine konsequent durchgeführte Berechnung auf der Basis klassischer Vorstellungen führt zu Werten von Gradienten, die den experimentellen Angaben nahekommen.

Lanczos weist darauf hin, dass es zur Bestimmung der für ein Verschwinden der Emissionslinien erforderlichen Gradienten anzunehmen genügt, dass α in der Formel (50) einen gleichen Wert für sämtliche Linien H_γ, H_δ, H_ε, und H_ζ hat*.

Es ist jedoch allgemein gut bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit einer spontanen Ausstrahlung dieser Linien sich um das Mehrfache voneinander unterscheidet (6). Auf diesen Widerspruch wurde bischer bei Wiedergabe der Lanczosschen Arbeit nicht hingewiesen.

Um auf Grund klassischer Vorstellungen die zur Herbeiführung einer Ionisation erforderlichen Gradienten zu bestimmen, wendet Bethe eine kombinierte wellenmechanische und klassische Berechnungsmethode an. Er bedient sich einer aus klassischen Vorstellungen abgeleiteten Formel für Ionisierungsgradienten und berücksichtigt sodann durch die von Lanczos aus wellenmechanischen Vorstellungen her gewonnenen Beziehungen die Veränderungen, welche die in dieser Formel enthaltenen Grössen erfahren haben. Eine solche Betrachtungsmehtode ist offenbar nicht ganz einwandfrei.

Im Jahre 1928 wurde von Smurow (7) eine Theorie der Ionisierung des Wasserstoffatoms durch elektrische Felder aufgestellt, welche die durch Epstein im Rahmen des Bohrschen Atommodells entwickelte Theorie des Starkeffekts in Anwendung bringt. Die Smurowsche Arbeit steht ihrem Wesen nach der von Robertson und Dewey (8), welche dem umgekehrten Problem—der Rekombination der Wasserstoffionen—gewidmet ist, recht nahe.

Die Berechnung, die Smurow konsequent auf der Basis klassischer Vorstellungen durchgeführt hatte, ergab für den minimalen Gradienten g, welcher für die Ionisierung des Wasserstoffatoms erforderlich ist (in dem den π-Komponenten entsprechenden Falle), folgende Formel:

$$g = \frac{0.086\, e}{\rho^2},$$

wo e die Elektronenladung und ρ den Radius der entsprechenden Bahn bedeuten.

In der Tabelle sind in der ersten Spalte die von Lanczos berechneten Gradientenwerte, in der zweiten—die Experimentalbefunde und in der dritten—die von uns nach der Smurowschen Formel berechneten g-Werte angeführt.

---

* Lanczos spricht überall von einer Wahrscheinlichkeit für die Linien im allgemeinen, während in die Formel (50) offenbar die Wahrscheinlichkeit für die entsprechende Starksche Komponente eingefügt werden muss.

Tabelle

Linien	Lanczos	Experimentalbefunde	Smurow
$H\gamma$	0.694	0.72—0.73	0.785
$H\delta$	0.360	0.37—0.38	0.377
$H\varepsilon$	0.203	0.20—0.21	0.204
$H\zeta$	0.123	0.12	0.122

Wie ersichtlich, übersteigen die aus klassischen Vorstellungen heraus ermittelten Werte die experimentellen Befunde unerheblich, d. h., das Verschwinden der Emissionslinien vollzieht sich praktisch bei Gradienten, die den für die übliche Ionisierung erforderlichen nahekommen.

Es muss allerdings hervorgehoben werden, dass die klassische Theorie wohl eine richtige Beschreibung des Verschwindens der Emissionslinien, nicht aber der bei niedrigeren Gradienten auftretenden Intensitätsschwächung zu geben vermag. Die Schwächung der Emissionslinien ist ein typisch wellenmechanisches Phänomen. Nun weist aber Bethe darauf hin (9), dass sich aus der wellenmechanischen Berechnung ergibt, dass die Intensitätsschwächung äusserst schroff mit der Feldstärke zunimmt (bei Zunahme des Gradienten um 3% fällt die Intensität um das Doppelte).

Es will uns scheinen, dass gerade dieser Umstand darauf hindeutet, dass die Ergebnisse der klassichen Berechnung für das Verschwinden der Emissionslinien den experimentellen Befunden recht nahe kommen müssen.

Optisches Laboratorium
Elektrotechnisches Institut.
Moskau

Eingegangen
d. 7. VI. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

[1] C. Lanczos, ZS. f. Phys., **68**, 204 (1931). [2] H. Rausch v. Traubenberg, R. Gebauer, O. Lewin, Die Naturwiss., **18**, 417 (1930); H. Rausch v. Traubenberg u. R. Gebauer, ZS. f. Phys., **71**, 291(1931). [3] Oppenheimer, Phys., Rev., **31**, 66 (1928). [4] H. Bethe, Handbuch d. Phys., Zweite Aufl., XXIV/1, 412—415. [5] E. I. Condon, C. H. Shortley, The Theory of Atomic Spectra, Cambridge Press, 404—409 (1935). [6] H. Bethe, ibid., 444. [7] А. Смуров, Вестн. теор. и экспер. электротехн., I, 279 (1928); A. Smurow, Arch. f. Elektrotechn., XXII, 31 (1929); А. Смуров, Электротехника высокого напряжения и передача энергии, 239—262 (1932). [8] Robertson a. Dewey, Phys. Rev., **31**, 973 (1928). [9] H. Bethe, ibid., 415.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 5 (100)

CHEMIE

DAS VERHALTEN DER SCHWEFELLÖSUNGEN UND EINER REIHE VON ORGANISCHEN SCHWEFELVERBINDUNGEN IN GESÄTTIGTEN KOHLENWASSERSTOFFEN GEGEN DIE METALLE

L. G. GINDIN, I. I. TORSUJEV und W. A. KASAKOVA

(Vorgelegt von M. A. Iljinskij, Ehrenmitglied der Akademie, d. 13. VII. 1936)

Die Untersuchung der Einwirkung auf Metalle der Schwefellösungen und einer Reihe von organischen Schwefelverbindungen in gesättigten Kohlenwasserstoffen erscheint als eine Entwicklung unserer Arbeiten über die Korrosion der Metalle durch leichten Kohlenwasserbrennstoff ([1,2]).

Wie bekannt, wird mit dem Gehalt des «aktiven» Schwefels im Brennstoff dessen Aggression in bezug auf Metalle verbunden. Die dem Schwefel und dessen einigen Derivaten zugeschriebene Aggression erscheint somit als der Hauptgrund für die mit grossen materiellen Verlusten verbundene Entschwefelung des Brennstoffes. Jedoch waren wir geneigt selbst beim ersten Bekanntwerden mit den Vorgängen einer Metallkorrosion durch Brennstoff, die Annahme zu machen, dass ein wirklich aggressives Verhalten des Brennstoffes (äusserst charakteristisches, z. B., für die Krack-Benzine), dessen Opfer viele Metalle werden können, sich als eine Folge der Autooxydation der ungesättigten Brennstoffkomponenten erweist. Diese Annahme erhielt im weiteren ihre überaus überzeugende Begründung ([2]). Daneben bezweifelten wir die in irgendeinem Masse bedeutungsvolle Rolle des Schwefels und selbst solcher Schwefelverbindungen wie Merkaptane in diesen Vorgängen. Scheinbar konnten diese nur solche, wie bekannt, für die Schwefelverbindungen empfindliche Metalle bedrohen, wie Kupfer und Blei, welche jedoch für die Ausfertigung derjenigen Einzelteilen von Auto- und Flugzeugmotoren, die mit dem Brennstoff in Berührung kommen, nicht angewandt werden.

Die im gewissen Masse der Einwirkung des Glutations bei den in der lebenden Zelle verlaufenden Oxydations- und Reduktionsvorgängen analoge Rolle des Merkaptans für die Beschleunigung der Autooxydation der ungesättigten Brennstoffe ([3,4]) erschien uns, mit Rücksicht auf die ganze physikalisch-chemische Spezifik des Brennstoffes, ebenfalls als wenig vermutlich und forderte ihre entsprechende experimentelle Begründung. Die später veröffentlichte Arbeit von Kruber u. Schade ([5]) über die Einwirkung der Merkaptane auf die Verharzung der Motorbenzole hat in diese interessante Frage wenig Klarheit eingetragen.

Bei all dem Zweifel hinsichtlich der aggressiven Rolle der Schwefelverbindungen war es unmöglich die etwaige Korrosion der Metalle durch deren Verbrennungsrückstände, d. h. Schwefeldioxyd und Schwefeltrioxyd und deren Hydrate, zu verneien. Wir wollen uns nicht in dieser Mitteilung bei der Gaskorrosion der Motoren und der dabei wirkenden Rolle des Schwefels, eines noch wenig studierten Faktors ([6],[7] u. a.) aufhalten. Wir bemerken nur, dass vom Standpunkt der Gaskorrosionsvorbeugung die breit angewandte Methode der Brennstoffreinigung von Merkaptanen mit Hilfe von Natriumplumbit nicht stichhaltig ist, da mit dem Umwandeln der Merkaptane in Disulfide das obenerwähnte Reinigungsverfahren den gesamten Schwefelgehalt im Brennstoff nicht herabsetzt, was einzig den erwünschten Effekt erzeugen könnte. Obgleich dem Problem der Brennstoffentschwefelung eine ziemlich reiche Literatur gewidmet ist, finden wir da, leider, wie sonderbar es auch wohl erscheinen könnte, eine sehr begrenzte Anzahl von Arbeiten, welche gerade die Quellen dieses Problems, d. h. die Einwirkung der Schwefelverbindungen auf Metalle, aufklären. Von den wenigen Arbeiten, welche dieses Thema betreffen, soll die Arbeit von Wood, Scheely und Trusky ([8]) nicht unbeachtet bleiben.

Da wir nicht die Möglichkeit haben, deren ausführliche kritische Analyse in der niedergelegten Mitteilung zu geben, wollen wir nur darauf hindeuten, dass nach dem Verhalten der Polyphasensysteme, es äusserst schwierig ist, das Verhalten gegen die Metalle der zwischen den Phasen verteilten Schwefelverbindungen, oder genauer, ihrer homogenen Kohlenwasserstofflösungen zu beurteilen. Die Mehrfasigkeit des Systems, dessen eine Phase (Wasser oder Wasserlösung) sich als ein Elektrolyt erweist, welcher zu den Metallen bei weitem nicht indifferent bleibt, ist bereits an und für sich ein bedeutungsvoller Korrosionsfaktor, welcher dabei noch im Stande ist, im Korrosionsvorgang all das Spezifische zu verdunklen, was durch die Eigenschaften der Schwefelverbindung bedingt sein könnte. Ausserdem kann Schwefel, ebenso wie seine Derivate, umsomehr als diese an der Oberfläche wirken, gerade an der Oberfläche der Phasenteilung: Metall-Wasser-Ligroin, oder einfach Wasser-Ligroin, und ebenfalls in der Wasserphase solchen chemischen Umwandlungen ausgesetzt sein, welche möglicherweise innerhalb der Phasen, wenigstens innerhalb der Kohlenwasserstoffphase, nicht stattfinden. Im Zusammenhang damit kann man irrtümlich den untersuchten Stoffen die Eigenschaften zuschreiben, welche den Umwandlungsprodukten eigen sind. Es kann auch möglich sein, dass gerade darin die Ursache der von den obenerwähnten Autoren behaupteten Aggression der Schwefel- und Thiophen-Polyphasenlösungen und anderer Verbindungen liegt, deren homogene Lösungen in Ligroin gegen die Mehrzahl der Metalle sich vollkommen indifferent verhalten. Die Angaben von Wood und seinen Mitarbeitern sind bedeutungsvoll in der Hinsicht, dass wasserhaltige, jedoch anscheinend homogene Ligroinlösungen von Schwefel und Isoamyl-Merkaptan, welche während eines Monats mit Alluminium, Zink, Blei und Eisen in Berührung standen, auf diese Metalle gar keine Einwirkung ausgeübt haben.

Um sich aber zu überzeugen, in welchem Masse unser Zweifel als begründet betrachtet werden darf, haben wir das Verhalten gegen die Metalle der Kohlenwasserstofflösungen von Schwefel, Äthyl- und Butyl-Merkaptanen, Äthyl-und Butylsulfiden und Diäthyldisulfid bei einer solchen experimentellen Situation untersucht, welche die Aufklärung dieser Verhältnisse in charakteristischer Form ermöglicht und ihre wissenschaftliche Auffassung erleichtert. Im allgemeinen ist es notwendig zu bemerken, dass wir nicht nur aus rein praktischen, sondern auch aus wissenschaftlichen Gründen diese

Untersuchung durchgeführt haben, die uns wertvolle Angaben über die durch Nichtelektrolyte hervorgerufene Metallkorrosion (Kupfer und Blei) versprach. Die Vorgänge der Metallzerstörung durch eine Hexan-Schwefellösung—einen typischen Dielektriker—erweisen sich als äusserst günstige Prozesse für ihre theoretische Erläuterung im Sinne unserer oben ausgedrükkten Auffassungen (1). Ferner sollten die erhaltenen Angaben über die Korrosion der Metalle durch eine homologische Reihe von Merkaptanen von normaler und verzweigter Struktur als Einleitung dienen für eine systematische Untersuchung der Abhängigkeit des Charakters und der Grösse der Aggression von gewissen Kathegorien von organischen Verbindungen—von den Strukturbesonderheiten der Radikale dieser Verbindungen, was unserer Meinung nach ein ziemlich grosses wissenschaftliches Interesse vorstellte*.

Die Einwirkung der Hexan-Schwefellösung auf die Metalle

Der chemisch reine Schwefel wurde in Oktaederförmigen Kristallen durch wiederholte Kristallisation von Stangenschwefel aus Schwefelkohlenstoff erhalten. Der Schwefelkohlenstoff wurde vorher mittels Metall- Quecksilber gereinigt und destilliert. Hexan-Kahlbaum «aus Petroleum» wies einen Schwefelgehalt von 0.018% auf. Da uns die Anwesenheit im Hexan von Schwefelverbindungen von einer unbekannten Struktur sowohl wegen der Gefahr einer möglichen Aggression, als auch aus Furcht vor einem dadurch induzierten Korrosionsprozess oder einer Aktivierung des Schwefels und dessen Derivaten (9) nicht wünschenswert war, so wurde das Hexan, zwecks Entschwefelung, während 3 Tage, bei Zimmertemperatur, mit einer flüssigen Legierung von Kalium und Natrium (1 : 2) durch Aufguss bearbeitet. Alsdann wurde der Hexan abgezapft, filtriert und destilliert. Auf diese Weise ist es uns gelungen den Schwefelgehalt im Hexan bis 0.008% herabzusetzen. Folgende Versuche mit einer weiteren Hexanentschwefelung, selbst durch Erwärmung des Hexans mit der obenerwähnten Legierung in einem verlöteten Röhrchen bei einer Temperatur von 130° C, während 30 Stunden, hatten keinen Erfolg.

Siedepunkt des Hexans 68—69 °C; $D\,^{15°}_{15°}$=0.6774; Jodzahl=0.

Die Lösung wurde durch Aufguss des Hexans auf sorgfältig zerriebenen Schwefel während 3 Tage bei Zimmertemperatur und bei öfterem Aufschütteln mit nachfolgender Filtrierung vorbereitet. Die Bestimmung des quantitativen Schwefelgehalts der Lösung wurde mittels einer Verdampfung deren genau gemessenen Einwagen aus halbrunden Glasgefässen bei Zimmertemperatur mit nachfolgender Trocknung des Rückstandes in einem Vacuum-Exsikkator über Silikagel und Paraffin** durchgeführt. Dieses Verfahren wurde von uns sorgfältig geprüft und bei seiner äussersten Einfachheit erwies sich als ein sehr genaues.

Die Schwefelkonzentration in der Ausgangslösung betrug 0.355%. Die Versuchsanordnung und die entsprechenden Untersuchungen wurden folgenderweise durchgeführt:

---

* Zurzeit studieren wir ebenfalls die Einwirkung auf Metalle der Hexanlösungen einer homologischen Reihe von gesättigten Fettsäuren.

** Das Lampenverfahren, welches wir für die quantitative Schwefelanalyse sämtlicher von uns untersuchten Kohlenwasserstofflösungen von Thioverbindungen benutzt haben, erwies sich als völlig unannehmbar für die Lösungen von elementarem Schwefel, welcher beim Verbrennen sich am Docht ablagerte und überhaupt ungenügend verbrannte.

Tabelle

No der Versuche	Versuchsdauer *	Gewichtsänderung der Metallplatte in g	Schwefelgehalt der Lösungen in Gewichts-%		In die Reaktion eingetretene Schwefelmenge in g	Gewicht des von den Metallplatten abgenommenen Niederschlags in g	Zustand der Metalloberfläche nach dem Versuch
			vor dem Versuch	nach dem Versuch			
	Die Einwirkung der Hexanlösung von Schwefel auf Stahl (0.20% C; 0.39% Mn; 20% Si; 0.02% P)						
1	16 Monate	+ 0.0004	0.355	0.356	0	0	Die Metalloberfläche blieb ganz rein und blank
2	16 »	+ 0.0006	0.355	0.355	0	0	
3	16 »	− 0.0005	0.355	0.355	0	0	
	Die Einwirkung der Schwefellösung auf Blei (0.01% Cu; 0.5% Fe; 0.15% Zn; 0.1% Bi)						
4	16 Monate	+ 0.0004	0.355	0.353	0	0	Die Metalloberfläche blieb unverändert
5	16 »	+ 0.0003	0.355	0.359	0	0	
6	16 »	− 0.0004	0.355	0.357	0	0	
	Die Einwirkung der Schwefellösung auf Kupfer (0.005% Bi; 0.01% Sb)						
7	16 Monate	− 0.0696	0.355	0.000	0.360	0.1010	Die Metalloberfläche war mit einer dicken Schicht dunkelblauen Niederschlags bedeckt
8	16 »	− 0.0290	0.355	0.188**	0.169	0.0424	

Der Vergleich des Metallverlustes, bei den Versuchen mit Kupfer, mit der Menge des in die Reaktion eingetretenen Schwefels und dem Gewicht des sich gebildeten Niederschlags gibt uns den Grund zu der Schlussfolgerung, dass der Niederschlag sich als Kuprisulfit Cus erwies. Die geringen Abweichungen von den theoretischen Werten der Metallverluste und des Niederschlagsgewichtes, mit Rücksicht auf die abreagierte Schwefelmenge, sind auf die unvollkommene Reinigung der Metallplatten zurückzuführen. Diese Reinigung stellte bedeutende Schwierigkeiten vor. Der Niederschlag wurde erst mit Hilfe eines feinen Spatels abgenommen, alsdann mit der mit Spiritus benetzten Watte.

* Eine solche Versuchsdauer wurde keineswegs durch irgendwelche wissenschaftliche Erwägungen hervorgerufen, sondern soll als Folge der bei uns während längerer Zeit vorhandenen Unmöglichkeit, die Versuchsanalysen durchzuführen, betrachtet werden.

** Die unvöllige Beendigung der Reaktion zwischen Schwefel und Kupfer erklärt sich durch die Schutzfunktion des Niederschlages, welcher das Durchdringen des Schwefels an die Kupferoberfläche erschwerte.

In trockene Glasröhrchen* wurden vorläufig die mit Schmirgelpapier bis 00 geschliffene und mit Spiritus und Hexan gewaschene, getrocknete und gewogene Metallplatten (35 mm × 14 mm × 2 mm) eingebracht. Alsdann wurden die Glasröhrchen, vorsichtig, damit sie nicht schwitzten, ausgedehnt, bis sich lange Halsenden an den Röhrchen bildeten. Darauf wurden die Röhrchen ungefähr auf $^1/_3$ ihres Fassungsvermögens mit einer bestimmten Menge (15 cm^3) der zu untersuchenden Lösung gefüllt und verlötet. Nach Ablauf von einer bestimmten Zeitperiode, während welcher die Röhrchen bei Zimmertemperatur und bei zerstreutem Licht, aufbewahrt wurden, wurden sie geöffnet und eine Untersuchung der Lösungen und der Metalle wurde durchgeführt. Die Lösungen wurden in bezug auf ihren quantitativen Schwefelgehalt untersucht, die Metalle—auf ihre Gewichtsänderung und die Natur der sich an den Metallplatten gebildeten Niederschläge. Der Vergleich der erhaltenen Werte: Metallverluste, Schwefelverlust und Niederschlagsgewicht, hat uns auf indirektem Wege die Möglichkeit gegeben die Zusammensetzung der Korrosionsprodukte und somit den Chemismus des Korrosionsvorganges festzustellen. Die Ergebnisse unserer Untersuchungen sind in der angeführten Tabelle niedergelegt.

Wie es sich aus dieser Tabelle ergibt, hat sich die Hexanlösung von Schwefel unter den von uns gewählten Versuchsbedingungen gegenüber Stahl und Blei als vollkommen indifferent erwiesen. Gleichzeitig hat die erwähnte Lösung in bezug auf Cu eine bedeutende Aggression (was an und für sich nicht neu ist) gezeigt, wobei Cu unter Bildung von Kuprisulfid CuS zerstört wurde.

Mit der theoretischen Erläuterung dieses typischen durch Nichtelektrolyte hervorgerufenen Metallkorrosionsvorganges im Sinne der oben ausgedrückten hypothetischen Voraussetzungen beschäftigen wir uns gegenwärtig.

Schlussfolgerungen

1. Es ist eine kritische Analyse der Frage über die Einwirkung auf Metalle der Lösungen von Schwefel und dessen organischen Verbindungen in gesättigten Kohlenwasserstoffen gegeben.

2. Es ist die Einwirkung auf Stahl, Blei und Kupfer der Hexan-Schwefellösung untersucht worden.

3. Es ist gezeigt, dass die erwähnte Lösung sich vollkommen indifferent gegenüber Stahl und Blei verhält, jedoch gleichzeitig eine starke Zerstörung des Kupfers unter Bildung von Kuprisulfid CuS hervorruft.

Zum Schluss bezeugen wir unseren aufrichtigsten Dank dem Ehrenakademiker M. A. Iljinski für die Aufmerksamkeit, die er unserer Arbeit geschenkt hat.

Staats institut
für Naphtaforschungen.
Moskau.

Eingegangen
d. 13. III. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

[1] L. Gindin u. R. Ambarzumjan, Bull. Acad. Sci. URSS, 10 (1935). [2] L. Gindin, I. Torsujew u. R. Ambarzumjan, Bull. Acad. Sci. URSS, 1 (1936). [3] F. Hopkins, Biochem. Journ., **15**, 286 (1921); Journ. Biol. Chem., **84**, 269 (1929). [4] R. Würmser, Oxydation et Réduction biologique. [5] O. Kruber u. W. Schade, Brennstoff-Chem., **14**, No 7, 124 (1935). [6] H. Mougey, Ind. Eng. Chem., **20**, No 1, 18 (1928). [7] S. Diggs, Ind. Eng. Chem., **20**, No 1, 16 (1928). [8] A. Wood, C. Sheely a. A. Trusty, Ind. Eng. Chem., **17**, No 8, 798 (1925). [9] H. Bennett, R Story, J. Clark, Oil a. Gas Journ., **25**, No 47, 138 (1927).

* Ausgelaugt durch Kochen im Wasser.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS]
1936. Volume III (XII), № 5 (100)

PETROGRAPHY

AN INVESTIGATION OF THE ELASTICITY OF SOME MOLTEN ROCKS

By M. P. VOLAROVIČ and A. A. LEONTJEVA

(Communicated by F. J. Loevinson-Lessing, Member of the Academy, 31. V. 1936)

In our investigation of the viscosity of fused rocks we have found (1) that after the formation of the primary crystalline phase the melt presents a disperse system possesing anomalous viscosity and plasticity quite analogous to those of the other disperse masses at ordinary temperatures (clays, dyes, etc.) Hence we thought is desirable to carry out an investigation of the elastic properties of melts at the moment of their crystallization.

On the other hand, researches in this direction are of interest for seismology, since it is at present assumed that under the earth's surface there is a layer of molten magma (substratum), which is capable of transmitting transverse oscillations. For instance, R. Daly in his monograph (2) gives considerable attention to the problem of the physico-mechanical properties of the basalt substratum. Until recently, however, the study of the elastic properties of rocks was conducted at comparatively low temperatures. Among the most recent works on this subject mention should be made of a paper by Birch and Low (3), who, under the supervision of Daly and Bridgman, measured the compressibility of quartz glass, obsidian and diabase glass at temperatures up to 500° and pressures up to 10 000 kg/cm^2.

Moreover, our investigations are of importance for the theory of the vitreous state of substances since there is no doubt that the dependence of the elastic constants of a melt on temperature will be different upon crystallization and upon supercooling to the vitreous state. In this connection, mention should be made of the works of G. Tammann and R. Klein, and G. Tammann and Kohlhaus (4), who studied the elasticity of organic glasses by the method of a rebounding ball, and hardness by the impression method within the softening range at temperatures not exceeding 100°.

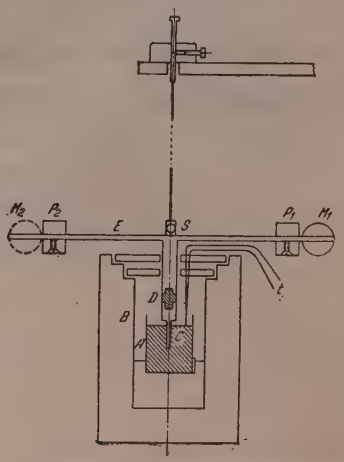
To investigate the elasticity of melts at temperatures up to 1400°, we used the oscillation method, which ad mits of determining the modulus of shear in absolute units. This method had been used by P. Lasarev and B. Deryagin (5) for an investigation of the elastic properties of clay suspensions, and later by M. Volarovič, B. Deryagin and A. Leontjeva in a study of low melting vitreous substances at temperatures up to 100°.

The figure shows a diagram of the apparatus. The melt was placed in a platinum cylinder *A*, 5 cm high and 3.8 cm in diameter, which was located in a platinum cascade furnace *B* with a maximum temperature of 1500°.

To avoid the rotation of cylinder A, the latter was provided with three juts, F, which fitted into the slots of a refractory support G. In addition, the bottom of the cylinder was fixed to the support by means of special cement. A nichrome cylinder C, 0.4 cm in diameter, was immersed in the melt to a depth of 2 cm with the aid of a slate coupling D, connected with the suspended system E.

The suspended system was the same as in the preceding work ([5]); it consisted of a rod with two sliding weights, P_1 and P_2 and was provided with a small mirror S. This system was suspended on a thin bronze band and had a proper oscillation period of about 120 seconds (in air).

To impart a torque to the suspended system, two electromagnets, M_1 and M_2, were used, the axes of which were perpendicular to the plane of the diagram. Upon closing the electromagnet circuit, the suspended system rotated



through a certain angle and then, if the medium between the cylinders was a truly viscous one, the equilibrium position was slowly restored.

However, with a gradual cooling of the melt, it may be observed at a certain temperature that after closing the electromagnet circuit the suspended system undergoes oscillations, rather strongly damped, with a short period of the order of 0.2—0.3 seconds. These oscillations were due to the elasticity of the melt placed between the cylinders A and C.

By the method of mirror reading, with the aid of telescope and a scale placed at a distance of 3 metres from the suspended system, it was found possible to determine the period of these forced oscillations of the system at different temperatures. Knowing the period of oscillations T and the moment of inertia of the system I*, the modulus of shear may be calculated by the following formula:

$$n = \frac{4\pi I}{lT^2}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right),$$

where r_1 is the radius of the suspended cylinder C; r_2—radius of the cylindrical vessel A, and l—height of the immersed part of cylinder C. The tempera-

* The moment of inertia of the system could be varied by shifting the sliding weights P_1 and P_2. The values of the modulus obtained for different moments of inertia were sufficiently constant, the discrepancy between separate values being of the order of 5 per cent.

ture was not uniformly distributed throughout the height of the cascade furnace; in the middle portion of the furnace, however, over a space of 1.5 cm (l=1.8 cm) the temperature variations amounted to but a few degrees. The measurements of temperature were made by means of a platinum—platinum-rhodium thermocouple t.

By the method described above the following specimens of rocks were studied: basalt No 404 from Mount Alagez, from the collection of P. I. Lebedev ([6]), basalt No 1 from Transcaucasia ([7]) and Olonets diabase No 104 from Shchelika ([8]). In Tables 1—3 data are given for the shear modulus of the melts of these rocks.

Table 1

Basalt No 404

$T°$	1080°	1060°	1030°	1000°	900°	870°
$n\frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2}$	A periodic motion	Beginning of oscillations	$2.06 \cdot 10^8$	$2.77 \cdot 10^8$	$3.32 \cdot 10^8$	$4.26 \cdot 10^8$

Table 2

Basalt NO 1

$T°$	1140°	1080°	1000°	900°
$n\frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2}$	Aperiodic motion	Beginning of oscillations	$4.98 \cdot 10^8$	$6.86 \cdot 10^8$

Table 3

Diabase No 105

$T°$	1120°	1090°
$n\frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2}$	Aperiodic motion	Beginning of oscillations

Tables 1—3 show that the beginning of oscillations, connected with the appearance of the elasticity of the melt, is revealed at a higher temperature than that at which the modulus of shear may be quantitatively determined. This is accounted for by the fact that at the outset the oscillations are so rapidly damped that their period cannot be measured.

A small change of the modulus of shear depending on temperature is noteworthy; for basalt No 404 with a decrease of temperatute from 1030 to 870° the modulus is increased but twice. In the writers' opinion this is accounted for by the fact that, although the primary crystalline phase was formed in this melt probably at 1060° (the onset of elastic oscillations), the ultimate solidification took place only below 87°. Then the period of oscillations would decrease sharply, owing to which further visual quantitative readings became impossible.

The accuracy of determination of the period of oscillations generally was not high, of the order of 3—5 per cent; to make the method more precise and

enlarge the scope of measurements, it is necessary to make use of photographic recording.

To make a comparison with our previous investigations of viscosity ([9]) and specific volumes ([10]) of these rocks we give in the first column of Table 4 the temperature at which, upon the cooling of the melt, there begins a sharp increase of viscosity and the appearance of plasticity (t_η); in the second column the temperature is given, at which occurs a sharp decrease of the specific volume, (t_v); the third column gives the temperature of the beginning of elastic oscillations (t_n).

Table 4

	t_η	t_v	t_n
Basalt No 1	1130°	1140°	1080°
Basalt No 404	1150°	1100°	1060°
Basalt No 104	1100—1150°	1130°	1090°

The figures given in three different columns refer to the beginning of crystallization of the melt, established by three different methods. A certain discrepancy between them is accounted for by the different conditions of cooling; in particular, in the viscosity measurements (by the rotating cylinder method) the crystallization temperature is always found to be higher owing to the stirring of the solution. It should be noted that all of the three specimens of these rocks yield closely accordant values (Table 4); this is not at all surprising since all of them are of the same type.

It is interesting to note that upon a subsequent fusion of the crystallizing specimens of rocks, a peculiar type of oscillations of the suspended system of the apparatus was observed, which had a small amplitude and an extremely short period and were of a quite different kind than those due to the torque. In investigating vitreous substances this phenomenon was not observed.

It may be supposed that these oscillations are connected with some molecular processes occurring during the fusion of a polycristalline rock.

Institute of Applied Mineralogy
and Petrographical Institute.
Academy of Scinces of the USSR.
Moscow

Received
31. V. 1936.

REFERENCES

[1] M. Volarovič, C. R. Acad. Sci. URSS, No 9, 561 (1934); Koll. ZS. 71, 159 (1935). [2] R. A. Daly, Igneous Rocks and the Depth of the Earht, New York, 189 (1933). [3] F. Birch a. R. R. Law, Bull. Geol. Soc. of Am., **46**, 1219 (1935). [4] G. Tammann u. R. Klein, ZS. anorg. u. allg. Chem., **192**, 161 (1930); G. Tammann u. Kohlhaus, ZS. anorg. u. allg. Chem., **182**, 49 (1929). [5] Акад. П. П. Лазарев и Б. В. Дерягин, Труды Инт-та строймат., № 1, 17 (1931). [6] П. И. Лебедев, Алагез, т. I, под ред. акад. Ф. Ю. Левинсона-Лессинга. Труды СОПС (1931). [7] М. П. Воларович, Труды ИПМ, вып. 66, 47 (1934); C. R., **202**, 78 (1936). [8] М. П. Воларович и Д. М. Толстой, Минер. сырье, № 5, 25 (1935). [9] М. П. Воларович, Ж. физ. хим., **4**, 807 (1933). [10] M. Volarovitsch u. A. Leontjewa, ZS. anorg. u. allg. Chem., **225**, 327 (1935).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 5 (100)

PLANT PHYSIOLOGY

ON CONTROLLING THE RIPENING OF THE JAPANESE PERSIMMON

By J. V. RAKITIN

(Communicated by A. A. Richter, Member of the Academy, 8. VI. 1936)

The Japanese persimmon is a valuable subtropical fruit whose area of distribution comprises the Caucasian shore of the Black Sea between Sochi and Batum.

The greatest obstacle to a rapid extension of persimmon-growing is the protracted period of fruit ripening (most varieties yielding ripe fruit only after the early winter frosts in December and even in January), and also the presence in the fruit of a high percentage of tanning substances which impart to the fruit a nasty, astringent flavour that persists even after the full ripening of the fruit. It is therefore but natural that those interested either in the commercial or in the scientific aspect of persimmon-growing should have spared no effort in trying to remove these two important obstacles. The large amount of work so far done has shown that an accelerated ripening and the removal of the astringent flavour may be achieved by a variety of methods.

In Japan (1), the fruit is kept for some time in tightly closed «sake»-barrels. According to variety and temperature, the fruit matures and loses its astringent taste within 5 to 10 days. In China (2), the same purpose is achieved by fumigating the fruit with incense in a closed chamber, by dipping the fruit into 10% lime white and by mechanical injury (pricking).

Gore (3) got rid of the astringent flavour of the persimmon by using narcotics, such as chloroform, ether, etc. Harvey (4) used ethylene to hasten the ripening of persimmon. Overholser (5) removed the astringent flavour of the fruit by exposure to ethyl alcohol vapour and ethylene preparations.

Harvey (6) cites data proving that an accelerated ripening and the removal of the astringent flavour of the persimmon can be achieved by keeping the fruit in warm water and by exposure to carbon dioxide. Statements to the same effect are to be found in Denisov's (2) recent review of modern American literature on the artificial ripening of the Japanese persimmon.

In the Soviet Union, attempts to use ethylene in stimulating the ripening of the persimmon were first made by Kozlov (8) in 1927, and subsequently by Ivanov, Prokoshev, Gabunya (9) and Ilyina (10), since 1924 the process of the artificial ripening of the persimmon has been studied by the Expedition of the Academy of Science of the USSR headed by the Academician Richter.

The report of the Expedition shows that ethylene, ethyl alcohol and a solution of ethylene in alcohol have been successfully used to stimulate ripening.

While practical methods were being devised to stimulate the ripening of the persimmon, a number of authors were engaged in studying the theoretical aspect of the problem. Harvey and Regeimbol ([11]) ascribed the stimulating effect of ethylene to its direct action on the enzymes.

Engelis and Zannis ([12]) have shown that the effect of ethylene on the ferments is not a direct, but an indirect one, being due to the fact that ethylene affects the highly sensitive protoplasm of the living cells.

Nord ([13], [14]), and his collaborators attribute the principal role in the process of stimulation to the alteration in the permeability of the protoplasm.

Ivanov and his collaborators, in discussing the results of their own work as well as those of the work done by Palladin, Manskaya and Popova ([15], [16]), who drew attention to the formation of fresh enzymes through the autolysis of vegetable matter, conclude that the part played by ethylene amounts to an acceleration of internal decay or to a partial autolysis of the living cells. Prokoshev and Babichev ([17]) suppose that the sulphohydryl system of cells is the main factor in the process of accelerated ripening. Soldatenkov ([18]) believes that the stimulants (ethylene, alcohol) affect the respiratory process, and influence thereby the whole of the ripening process. The object of the present work was to ascertain the dependence of the rate of ripening upon the processes associated with the formation of decomposition products.

As early as 1896, Gerber ([19]) had shown that an increased production of ethyl alcohol was a concomitant of the ripening of fruit.

This assertion was subsequently endorsed by many investigators. The writer had occasion to observe that the accelerated ripening of fruit due to mechanical injury, to fungoid growths etc., differed from normal ripening in that the rate of formation of ethyl alcohol was accelerated. Werner and Kling ([20]) found that the accelerated ripening of fruit due to fungoid growths led to the decay of protein and to the accumulation of amine nitrogen.

On the other hand, it is known that a reduced partial oxigen pressure resulting in the formation of large amounts of alcohol involves a reduction of oxidation-reduction potential as well as some changes in the sulphohydryl system, and finally results in far-reaching changes of the protoplasm complex associated with the decay of proteins ([21], [25]).

The facts set forth above show that the processes of proteolitic decay and those associated with the formation of ethyl alcohol, are interrelated.

Hence it is obvious that such changes as may take place in the process of the formation of ethyl alcohol may be adopted as indices of decomposition processes, of the condition of the sulphohydryl system, of the relative value of oxidation-reduction potential, etc., or, in other words, as indices of what, according to modern ideas, is of paramount importance in metabolism.

The first series of experiments showed the dependence of the dynamics of alcohol formation upon the rate of ripening of the fruit if subjected to the action of ethylene.

The specimens used in the experiments were fully-developed fruits of Tsuru, Dai-Dai and Emon varieties, which had begun to grow yellow, but still preserved their hardness and their astringent flavour.

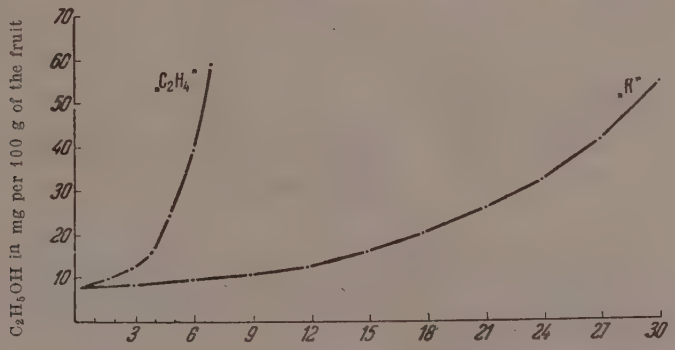
The acceleration of ripening was brought about by treatment with ethylene obtained according to the Erlenmeyer-Bunte method ([22]) (chemically pure ethyl alcohol and phosphoric acid being the initial products). The ripening took place in hermetically sealed wooden chambers of a capacity of 20 litres. Not more than 10 fruits were placed in each chamber. Every 24 hours until the full ripening of the fruit, the gas charge (1 : 1000) was

renewed and the chambers ventilated. The control fruit were ventilated, but were not treated with ethylene.

Samples for the distillation of alcohol were drawn every 24 hours from the group treated with ethylene and every 72 hours from the control group. Alcohol was distilled from a 100-gram sample. The determination of alcohol was made after Nicloux ([23]). The experiments, the results of which are represented by the curves given below (see p. 231, 232), were carried out at a temperature of 17—18°C.

These curves show clearly that the shorter is the period of ripening, the sharper is the rise of the curve of the formation of alcohol, and that, subject to very slight deviations, the amount of alcohol in the ripe fruit is practically independent of the rate of ripening of the fruit.

Such regularities will, of course, be observed only if the ripening takes place in aerobic conditions. As to methods involving obstructed breathing



Emon variety

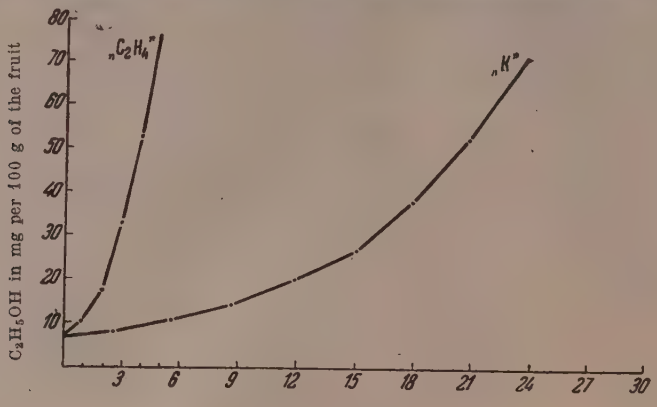
or temporary anaerobiosis they would result in an enhanced alcohol content in the fruit, as well as in a higher percentage of other decomposition products than would be present in fruit matured under normal conditions.

In addition to ethylene, the procedure adopted to accelerate the ripening of the fruit was the injection of various solutions, such as: ethyl alcohol, glyceric aldehyde, glyceric acid, lactic acid, pyrovinic acid, hydrochloric acid, sulphuric acid. The injections were made with an ordinary surgical syringe at the rate of 1 cm^3 of solution per 100 g of fruit. The injection experiments were made on fully grown yellowing fruit of Dai-Dai, Emon, and Tsuru varieties and on some garden varieties. 1% acid solutions and 12% alcohol solutions proved the best as regards acceleration of ripening and quality of the fruit. The experiments were carried out at a temperature of 17—18°. The control specimens ripened within 20—30 days from the beginning of the experiment, those injected with acid solutions matured within 4—6 days and those injected with alcohol, within 10—13 days. A study of the dynamics of alcohol formation during ripening and upon the injection of various substances has shown that the alcohol formation curves obtained in this case are similar to those obtained in the first series of experiments.

The method used to hasten maturity in the third series of experiments was that of mechanical injury (radial incisions 5—7 mm deep being made on the surface of the fruit) or squeezing. Both the incised and squeezed fruit ripened in all cases twice or three times as quickly as the control specimens,

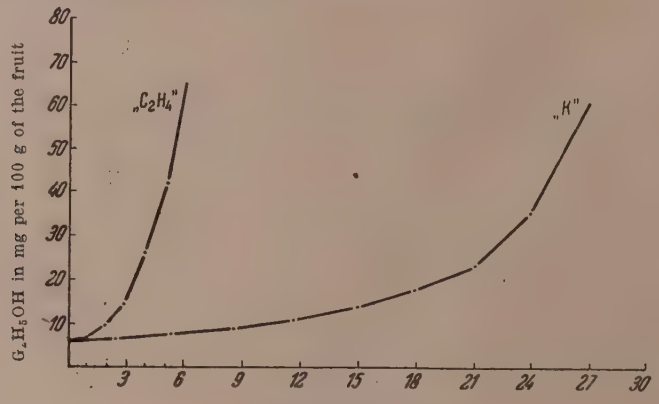
the alcohol formation curves being absolutely identical with those obtained in the first series of experiments.

A comparison of all the alcohol formation curves und ripening periods shows that, in spite of the incomparability of the stimulants, the nature of the change produced in the protoplasm complex is the same in all cases.



Tsuru variety

None of the data set forth above, however, give an adequate answer to the question of whether the processes associated with alcohol formation are one of the main links of stimulation or whether they are only secondary phenomena concomitant with ripening.



Dai-Dai variety

This question could be answered only by direct experimentation carried out in such conditions as would ensure a rapid deviation of metabolism towards alcohol formation.

For this purpose, the simplest among all known methods was used, viz., the keeping of fruit in warm water. Numerous experiments were made to ascertain the effect of temporary anaerobiosis on processes associated with the forma-

tion of alcohol. The table given below shows those temperatures that are the most favourable to accelerated ripening.

Alcohol was determined after Nicloux ([23]), the aldehyde after the method described by Agabalyantz ([24]).

Results obtained by Keeping Fruit in Water Heated to 30°C

Duration of immersion (in water in hours)	Emon			Dai-Dai		
	Products of anaerobic metabolism (in mg per 100 g of fruit)		Duration of ripening after immersion in water (in days)	Products of anaerobic metabolism (in mg per 100 g of fruit)		Duration of ripening after immersion in water (in days)
	C_2H_5OH	CH_3CHO		C_2H_5OH	CH_3CHO	
Control	7.5	0.088	29	7.0	0.084	25
3	37.2	1.044	19	35.1	0.921	21
6	72.1	1.784	15	70.5	1.691	11
9	102.1	2.728	12	104.0	2.651	7
12	139.0	2.992	6	138.2	2.911	6
15	178.1	3.532	5	177.1	3.316	5
18	215.4	3.420	6	208.4	3.417	7
21	247.0	3.168	7 (faint colouring)	242.1	3.016	10 (faint colouring)
24	290.5	2.904	9 (injured, not coloured)	283.5	2.825	13 (injured, not coloured)

Results Obtained by Keeping Fruit in Water Heated to 35°C

Duration of immersion in water (in hours)	Emon			Dai-Dai		
	Products of anaerobic metabolism (in mg per 100 g of fruit)		Duration of ripening after immersion in water (in days)	Products of anaerobic metabolism (in mg per 100 g of fruit)		Duration of ripening after immersion in water (in days)
	C_2H_5OH	CH_3CHO		C_2H_5OH	CH_3CHO	
Control			30	8	0.091	28
3	7.3	0.088	20	45.0	0.962	22
6	42.1	1.121	12	82.5	1.760	14
9	89.3	1.734	7	124.2	2.288	6
12	130.0	2.356	4	167.5	3.520	4
15	171.7	3.884	5	219.3	3.165	6
18	227.6	3.216	7 (faint colouring)	264.2	2.844	8 (faint colouring)
21	273.0	2.811	9 (injured)	305.0	2.712	9 (injured)
24	312.7	2.215	11 (injured)	343.4	2.114	10 (injured)
	352.0	2.011				

The above tables show that there is a very definite relation between the duration of the exposure of the fruit to anaerobic conditions, which stimulate the processes associated with the formation of C_2H_5OH and CH_3CHO,* and the rate of ripening of the fruit.

A short exposure of the fruit to anaerobic conditions results in a shortening of the ripening period. The best results in this respect are obtained by a 9—15-hour anaerobiosis. Any further exposure to anaerobiosis retards ripening and

* The reduced content of CH_3CHO following upon a 12 hour immersion in water was probably due to the fact that its conversion into C_2HO_5H had by the time increased, and also to losses through evaporation.

even causes the decay of the fruit. A comparison of the rate of ripening of the fruit with the quantities of decomposition products formed during the anaerobiosis shows that by increasing up to a certain point the amount of alcohol and aldehyde (C_2H_5OH up to 136—170 mg per 100 g of fruit, and CH_3CHO up to 3.316—3.884 mg per 100 g of fruit), a shortening of the ripening period is obtained. Any further formation of decomposition products, however, retards ripening and causes the fruit to decay.

The decay of the fruit may be put down to the fact that the functioning of the protoplasm is affected by a decay of its elements as well as to the toxic effect of the decomposition products.

The stimulating effect of artificial anaerobiosis would appear to lie in the fact that it speedily brings the protoplasm complex into a state which, under ordinary conditions of ripening, would only set in as a result of a gradually increasing natural anaerobiosis due to the ripening of the fruit. And it is but natural that the processes associated with alcohol formation thus stimulated may, since they are a result of the development of the fruit, become of paramount importance at the last stage of that development, *i. e.*, during the ripening of the fruit.

The last series of experiments make it abundantly clear that the processes, associated with the formation of decomposition products, and, possibly the decomposition products themselves, are a vital factor in the ripening of fruit and ought to be further investigated.

Both the literature dealing with the artifical ripening of the Japanese persimmon and the results of the writers own work would suggest the following conclusions:

1. The processes associated with the formation of decomposition products affect the rate of ripening to an overwhelming extent.

2. The action of any factors stimulating ripening amounts to a stimulation of the processes of decay.

3. The control of the rate of fruit ripening comes to a control of the processes connected with the formation of decomposition products.

Institute of Plant Physiology.
Academy of Sciences of the USSR.
Moscow.
Batoum Botanical Gardens.

Received
8. VI. 1936.

REFERENCES

[1] D. Fairchild, Abs. ESR, **17**, 618 (1905—1906). [2] Зарецкий, Японская хурма, 50 (1934) [3] C. H. Gore, Bull. No 141, Bureau of Chem. U. S. Dept. of Agr. (1911), No 155 (1912). [4] Harveya. Regeimbol, Proc. Amer. Soc. Plant Phisiologist, Abstracts of papers, Philadelphia (1926). [5] Overholser, Proc. Amer. Soc. Hort., Sci., 256 (1924). [6] Гарвей, Труды по прикл. бот., ген и сел., XVIII, вып. 1, 196 (1927—1928). [7] Денисов, Советские субтропики, № 4 (1934). [8] Козлов, Сад и огород, № 5 (1928). [9] Иванов, Прокошев и Габуния, Труды по прикл. бот., ген. и сел., XXV, вып. 1, 247 (1930—1931). [10] Ильина, Химия свежих плодов и овощей (1933). [11] Harveya. Regeimbol, Journ. Amer. Chem., Soc., **49**, 1117 (1927). [12] Englisa. Zannis, Journ. Biol. Chem., **52**, 797 (1930). [13] F. F. Nord. a., K. W. Franke, Journ. Chem., **79**, 27 (1928). [14] Nord, ZS. angew. Chem., **43**, 107 (1929); Trans. Faraday Soc., 26, 760 (1930). [15] Палладин, Дневник Первого съезда русских ботаников (1921). [16] Иванов и Кудрявцева, Bioch. ZS., **212**, 241 (1929). [17] Прокошев и Бабичев, Труды по прикл. бот., ген. и сел., серия III, N 5 (1934). [18] Soldatenkov, C. R. Acad. Sci. URSS, II, N 3—4 (1935). [19] Gerber, Am. Sci. Nat. Bot., VIII, 4 (1896). [20] Бернер и Клинг, Труды по ирригации, вып. 3, 127 (1934). [21] Warburg u. Sakume, Arch. Physiol., **200**, 74 (1930). [22] Эрленмейер и Бунте, quoted from Геттерман и Виланд, Практ. раб. по орг. хим. [23] M. Nicloux, Bull, Soc. Ch. **14**, 862 (1932). [24] Агабальянц и др. Исследование продуктов переработки винограда (1932). [25] Mothes, Naturwissenschaften, **97** (1923).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII) № 5 (100)

PLANT PHYSIOLOGY

COLD RESISTANCE OF THE FIRST GENERATION OF WHEAT HYBRIDS

By M. I. SALTYKOVSKIJ

(Communicated by A. A. Richter, Member of the Academy, 3. VI. 1936)

Since the appearance of the works of Nilssen-Ehle (1), cold resistance has been universally recognized as a complex characteristic due to a number of independent one-valued factors. As a rule such quantitative characteristics are inherited in the first generation according to the intermediate type. A. A. Gorlach (2) proved the latter fact with regard to the cold resistance of winter wheat. In older generations, with quantitative forms of heredity, a number of intermidiate forms are usually obtained. At the same. time the greatest number of forms belongs to the medium classes and is therefore close to F_1. Selection practice in handling winter wheat shows that the simplest problem is to obtain constant forms of cold resistance of the intermediate order between the initial forms. In our selection practice in Saratov (1924—1930) we had a great number of facts to corroborate this statement. Hayes and Ammodt obtained the same results when crossing winter and spring wheats. Hence we came to the conclusion, that in studying the regularities of cold resistance in F_1, we would obtain valuable data to help us in judicious selection of couples for crossing wheats when selecting winter resisting varieties. We made a number of experiments in this line.

Recent investigations of winter resistance of cereals prove that the decisive paramount feature of the winter resistance of cereals in the steppe regions is its resistance to cold, and, as proved by I. I. Tumanov (5,6) and others, the tremendous variability in the resistance of corn depends on the inconstancy of the conditions that determine this resistance in autumn and in the beginning of winter, on one hand, and on the other hand, on the no less efficacious (7,8,9,10) and complex winter and spring conditions, which diminish if they do not absolutely destroy the resistance (hardiness), achieved in the autumn and in the beginning of winter. The deductions of Nilssen-Ehle and of all his followers are therefore fully applicable to cold resistance.

The experimental evidence partly quoted below, was obtained to a considerable extent at the Selection-Genetic Station in Saratov in 1929—1931, and also in the Selection-Genetic Institute at Odessa in 1933—1935. The cold resistance of the plants was determined by both field and laboratory methods. Sowing in beds was done with a planting selection apparatus. About 100 grains were sown of each number of hybrids and their parent forms. The parent forms sown on both sides of the hybrids. The perished plants were counted up in the spring, when the loss of plants damaged by winter could be

summed up. In the winter of 1929/1930 in Saratov the field crops were protected by a straw cover after the frosts had set in (—15° C in the air), and sunflower stems were used to secure the snow. All the other field crops, data on which are cited in the paper, wintered under ordinary snow conditions. In laboratory experiments the sowing was done in vessels in the autumn; the plants were grown in vegetation houses, the soil containing 60 per cent of moisture on the total moisture capacity. In winter the vessels were kept in cold cellars at a temperature of —3° to —7°, prior to refrigeration in refrigerating cameras. In the Saratov experiments the vessels after refrigeration in refrigerating camera were again kept in the cold cellar, while in Odessa the plants, after refrigeration and slow thawing, were grown in greenhouses.

The present paper gives data on winter wheats which, if arranged in the order of diminishing cold resistance, would give the following sequence: 0329, 0121, 00118, 0237, Ukrainka, Cooperatorka, 0534. The spring wheats if arranged from late maturing to early maturing species are distributed in the following order: 3439, 3483, 0321, Marquis, 0274, Albosar, 0721, 062, 2184, Prelude. Yarovisation does not accelerate the development of any of these forms of spring wheat, *i. e.*, the difference in the length of the period of ripening depends in their case on the duration of the light stage.

Table 1

The Cold Resistance of Hybrids of Winter and Spring Wheats as Compared with Parent Forms

Field experiments in Saratov 1929/1930. Sowing made on September 5

Combinations	Percentage of preserved plants			Combinations	Percentage of preserved plants		
	♀	F_1	♂		♀	F_1	♂
Cooperatorka × 0329 . .	96	100	100	0329 × 0321	100	100	98
» × 0121 . .	95	94	100	Marquis × 0329 .	10	98	100
» × 0321 . .	95	96	95	Albosar × 0329 .	8	100	100
» × 062 . .	96	85	1	062 × 0329	3	95	100
» × 0721 . .	95	76	1	0721 × 0329 . . .	4	95	100
» × 2184 . .	96	6	1	2184 × 0329 . . .	2	86	100
» × Prelude	94	0	0	Prelude × 0329 . .	0	50	100

The experiments in the study of cold resistance of wheat hybrids have led us to the following conclusions:

1. The cold resistance of hybrids F_1 derived from the crossing of winter wheat with spring wheat, possessing various duration of the light stage of development, forms regular series. The resistance of these hybrids is highest for the longest light stage of the spring parent. At the same time the range of variation in the resistance of hybrids of the same form of winter wheat crossed with different spring forms is exceptionally wide (Tables 1 and 3).

2. When crossing identical spring wheats whether soft or hard (lack of space prevents us from quoting the experiments made with the latter) with different winter wheats or quitches, the resistance of the hybrids rises with the rise of cold resistance of the winter form of wheat or quitch.

3. The hybrids of winter and spring wheats, winter and winter wheats, intraspecific, interspecific and intergeneric wheat-quitch hybrids possess

Table 2

Cold Resistance of Wheat Hybrids Derived from the Crossing of Winter Wheats of Different Resistance

Field experiments in Saratov and Odessa

Combinations	Percentage of preserved plants			Time and place of experiments
	♀	F_1	♂	
Cooperatorka × 0329	53	95	97	1927/28 Saratov
» × 0329	38	95	99	1928/29 »
00118 × Cooperatorka	62	34	3	1933/34 Odessa
0329 × »	41	12	3	1933/34 »
00118 × Ukrainka	62	60	33	1933/34 »
0329 × »	56	32	33	1933/34 »
0237 × »	73	63	33	1933/34 »
Cooperatorka × 0534	33	29	0	1933/34 »
0329 × 0237	71	61	73	1933/34 »
Cooperatorka × 0329	33	65	71	1933/34 »

Table 3

Measuring the Value of Cold Resistance of Wheat Hybrids F_1 in Degrees

Laboratory experiments of 1930/1931 in Saratov. Sowing made on September 2

Combinations and parent couples	Percentage of preserved plants				Combinations and parent couples	Percentage of preserved plants			
	−7°	−12°	−15°	−18°		−7°	−12°	−15°	−18°
0321 × Cooperatorka	100	100	50	0	0321 × 0329	100	100	87	0
0721 × Cooperatorka	87	48	0	0	0721 × 0329	88	50	0	0
Prelude × Cooperatorka	57	13	0	0	Prelude × 0329	75	0	0	0
Cooperatorka	100	100	75	0	0329	100	100	100	25
0321	0	0	0	0	0321	0	0	0	0
0721	0	0	0	0	0721	0	0	0	0
Prelude	0	0	0	0	Prelude	0	0	0	0

Laboratory experiments of 1934/1935 in Odessa. Sowing made in October 1

Combinations and parent couples	Percentage of preserved plants			Combinations and parent couples	Percentage of preserved plants			
	−7°	−9°	−13°		−7°	−13°	−17°	−19°
0321 × *Agr. elongatum*	100	100	100	*Agr. elongatum*	100	100	100	100
3439 × Cooperatorka	100	100	82	0329	100	100	0	0
3483 × »	100	70	80	0329 × *Agr. elongatum*	100	100	50	20
0321 × »	100	50	20					
0274 × »	100	0	0					
Cooperatorka	100	100	100					
3439	99	0	0					
3483	83	0	0					
0321	80	0	0					
0274	0	0	0					

Note: In the Saratov experiments refrigeration was carried out in the second half of March; while in the Odessa experiments—one part (the left column) was made on December 14—17, and the second part (the right column) on January 29—30.

on the whole an intermediate cold resitance*. A great number of facts in the works of I. V. Michurin on a great variety of remote and close crossings of fruit-plants also show that the cold resistance of hybrids in F_1 is intermediate, and is above that of the unresistant parent.

Since in such quantitative forms of inheritance of characterictics as cold resistance, the majority of forms in F_2 and E_3 etc. are located near F_1, we are justified in making the following assumption: It is possible rapidly to improve the cross-fertilizing cereals, grasses etc. which possess no cold resistance, and to render them winter resistant, practically in the course of one year, by crossing them with varieties which possess a high cold resistance.

4. An analysis of the resistance of wheat hybrids to low temperatures corroborates the deductions we made jointly with E. S. Sapryguina, viz., that the cold resistance of winter wheats depends not only on the duration of the yarovisation stage, but also on the duration of the light stage of the wheat. Hence we may presume that the cold resistance of wheats depends not only on one polymeric series, but on several. In our opinion, two basic complexes of cold resistance characteristics are connected with the stages of development, *i. e.*, with the stage of yarovization and the light stage, discovered by T. D. Lysenko ([11]). We can therefore assume with a high degree of probability that forms possessing considerably greater cold resistance than does either of the parents can be obtained by crossing two varieties of wheat similar or very near to each other in their resistance to cold, but differing greatly in the duration of their stages of development.

5. On the whole, the regularities of inheriting the resistance to cold in quitch-wheat hybrids are the same as those in wheat hybrids. According to our observations, the hybrids of quitch with early maturing spring wheats possess the minimum cold resistance, the hybrids of quitch with late maturing spring forms of wheat show a greater cold resistance, and the maximum cold resistant forms are the wheat-quitch hybrids F_1, derived from the crossing of winter forms of wheat with quitches. Hence, we consider most promising for the production of cold resisting winter and perennial wheats the crossing with winter wheats and partly with the late maturing forms of spring wheats.

Kujbyšev District Experimental
Station of Agriculture

Received
3. VI. 1936.

REFERENCES

[1] H. Nilsson-Ehle, ZS. für Pflanzenzüchtung, **1** (1913). [2] А. А. Горлач, Труды Белоцерковской селекционной станции, V., в. 2 (1930). [3] Ю. А. Филипченко, Генетика мягких пшениц (1934). [4] Hayes a. Aamodt, Journ. of agricultural research, **35** (1927). [5] И. И. Туманов, Труды по прикладной ботанике, XXV (1930—1931). [6] И. И. Туманов, Доклад на II Всесоюзном совещании по зимостойкости (1933). [7] М. И. Салтыковский, Журн. опытной агрономии юго-востока, VII (1929). [8] А. І. Сакс і І. Н. Бародзіна, Асновы фізіялогіі зімастойкасці азімага збожжа (1934). [9] М. И. Салтыковский, Труды по селекции Саратовской селекционной генетической станции, 1 (1934). [10] M. I. Saltykovsky and. E. S. Sapryguina, C. R. Acad. Sci. URSS, IV, 2 (1935). [11] Т. Д. Лысенко, Теоретические основы яровизации (1935).

* With the intermediate type of inheritance of cold resistance there can be obtained, according to the extent of the exposure to cold of the plants, in the hybrids of any couple, in different years and in different conditions of wintering in one year, all types of inheritance of cold resistance F_1, *i. e.*, the dominant, the recessive and the intermediate.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 5 (100)

ZOOLOGIE

ZUR FRAGE DES BAUES UND DER EVOLUTION DES ELLBOGENGELENKES DER SÄUGETIERE

Von A. N. DRUŽININ

(Vorgelegt von A. N. Severzov, Mitglied der Akademie, d 2. VI. 1936)

Beim Studium der Evolution der Tetrapodenextermitäten erschien es notwendig, die Frage der Evolution des Ellbogengelenkes der Säugetiere zu berühren.

Bis jetzt wird bei der Beschreibung dieses Gelenkes der Säugetiere von der Mehrzahl der Autoren (Tornier, Ellenberger, Schmaltz, Klimow und a.) der Tradition nach der Ellbogen der Menschen als Grundlage genommen und die Terminologie Köpfchen—*capitulum* und Rolle—*trochlea* gebraucht. Solches hat zur Folge, dass vollständig unhomologe Teile der Ellbogengelenke verschiedener Arten der Säugetiere gleiche Namen bloss auf Grund einer oberflächlichen Ähnlichkeit erhalten. Eine mehr oder weniger konvexe Bildung wird *capitulum*, eine flache oder rinnenartige *trochlea* genannt. Infolge der oft beobachteten Kompliziertheit der Konfiguration des Ellbogengelenkes und gleichzeitigen Armut der für seine Beschreibung anwendbaren und dabei der Anatomie des Menschen entnommenen Terminologie, steht die morphologische Analyse des Ellbogens der Säugetiere bis jetzt noch lange nicht auf gebührender Höhe.

Wenn wir diese Analyse vertiefen, so müssen wir eine Reihe neuer neutraler Ausdrücke einführen, welche sowohl für den Ellbogen des Menschen, als auch für denjenigen eines beliebigen Säugetieres gleich treffend sind. Ohne diese vertiefte Analyse kann man die einzelnen Teile des Ellbogengelenkes bei den verschiedenen Formen nicht richtig homologisieren und folglich kann man sich keine richtige Vorstellung vom Evolutionsgange dieses Gelenkes bei den Säugetieren im allgemeinen machen und im besonderen die Entwicklung des Ellbogengelenkes bei den höheren Primaten und dem Menschen nicht erfassen.

In der gegenwärtigen vorläufigen Mitteilung wollen wir nur eine kurze vergleichend-anatomische Reihe des Ellbogengelenkes der Säugetiere aufstellen und hinweisen, worauf die Beschreibung dieses Gelenkes begründet ist.

Wenn wir den Humerus des Ornithorhynchus oder der Echidna mit der Beugeseite nach vorne und mit seinem präachsialen Rande nach aussen*

* Gewöhnlich steht der Humerus bei den Monotremata mehr oder weniger senkrecht zur mittleren Körperfläche, so dass seine Beugeseite nach vorn und nach unten gerichtet ist und der präachsiale Rand sich als dorso-kranial und nicht als Aussenrand erweist.

stellen, wie er gewöhnlich bei der Mehrzahl der übrigen Mammalia steht, so erweisen sich die mit demselben gelenkenden Knochen des Vorderarms als hintereinanderliegend: der Radius vorne, die Ulna aber hinten und um ein weniges medialer. Die Gelenke des Vorderarms bilden bei beiden Arten konkave Flächen: (Fig. 1, *A*). Ich bezeichne laut Tornier diese hintereinander gelegenen Facetten des Radius und der Ulna primäre: *facies articularis*

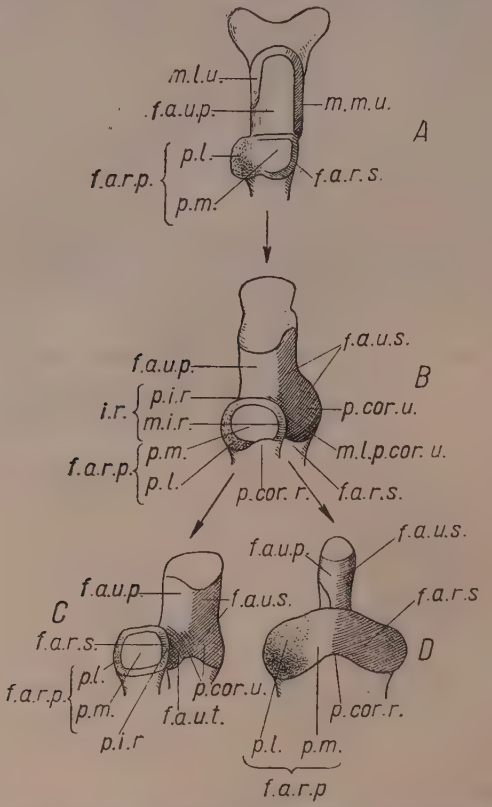


Fig. 1. Das Schema des proximalen Endes des rechten Vorderarms: *A—Monotremata; B—Marsupialia; P—Homo; D—Ungulata.*

radii prima (f. a. r. p.) und *facies articularis ulnae prima (f. a. u. p.)*. Beim Radius ist der laterale Rand der Facette breiter und bildet eine Art selbständiger Fläche, welche ich als Aussenteil der primären Facette *(pars lateralis (p. l.)* hervorhebe, wobei ich für den Grundteil der primären Facette den Namen *pars medialis (p. m.)* beibehalte.

Beim Ellbogenknochen ist der laterale Rand seiner Facette schwach entwickelt *(m. l. u.)*; derselbe ist in seiner distalen Hälfte eingekerbt. Der mediale Rand der Facette ist bedeutend stärker entwickelt und erhält sich vollkommen.

Einem solchen Bau der proximalen Enden des Vorderarms entsprechend, finden wir am Humerus (Fig. 2, *A*) einen einheitlichen gemeinsamen konvexen Gelenkkopf—*condylus radio-ulnaris (c. r. u.)*. Er liegt mit dem einen

Teile—*pars radialis (p. r.)*—welcher für das *capitulum* des Ratius bestimmt ist, auf der ventralen Seite des distalen Knochenendes und mit dem anderen Teile— *pars ulnaris (p. u.)*, welcher sich dem Ellbogenknochen angliedert, erstreckt sich der Gelenkkopf bis auf das eigene distale Ende des Oberarms. Dieser Teil des Gelenkkopfes ist ein wenig medialer als der erstere gerichtet.

Zu beiden Seiten der *pars ulnaris condyli radio-ulnaris* befinden sich besondere sattelförmige Vertiefungen, welche zur Gelenkbildung der primären Facette des Ellbogenknochens mit *margo lateralis* und *margo medialis* dienen. Ich gebe diesen sattelförmigen Bildungen die Namen des äusseren und inneren Sattels des Ellbogenknochens—*sella ulnaris lateralis* (*s. u. l.*) und *sella ulnaris medialis* (*s. u. m.*). Letztere Bildung welche in ihrem Ganzen medialer von *condylus radio ulnaris* liegt, ist bedeutend stärker als die erstere entwickelt, die bezüglich einer anderen sattelförmigen von mir mit dem Namen *sella radialis* (*s. r.*) belegten Bildung dorsal gelagert ist. Die *sella radialis* entwickelt sich längs dem Aussenrande der *pars radyalis condyli radio-ulnaris* und dient zur Gelenkung des erweiterten Aussenrandes des *capitulum* des Radius [Fig. 1, *A* (*p. l.*)]. Folglich wird das Ellbogengelenk der Monotremata dadurch charaterisiert, dass der grösste Teil des Humerusgelenkes einen einheitlichen gemeinsamen Gelenkkopf (*condylus radio-ulnaris*) darstellt, welcher sich mit dem Radius und dem Ellbogenknochen gelenkt; jedoch gibt es ausserdem noch selbständige Facetten (*sella radialis*, *sella ulnaris lateralis* und *sella ulnaris mediaris*), welche zur selbständigen Gelenkung nur des einen von beiden dienen.

Zum Ellbogengelenk der Beuteltiere übergehend [wir nehmen als Beispiel den Ellbogenbau eines Opossums (*Didelphys*), das dem Grundtypus nahe ist], bemerken wir, dass die Ulna zwei Gelenksflächen hat, eine hinter dem Radius liegende, die primäre Facette [Fig. 1, *B* (*f. a. u. p.*)] und eine andere, welche von demselben medialer liegt [die sekundäre Fläche—*facies articularis ulnae secunda* (*f. a. u. s.*)]. Diese zwei Flächen des Ellbogenknochens sind nicht allein den Beuteltieren, sondern auch allen Platzentaliern eigen. Es liegt auf der Hand, dass die primäre Facette des Ellbogenknochens der Gelenkfläche des Ellbogenknochens der Monotremata und die sekundäre Fläche dem sich erweiterten medialen Rande der einheitlichen Facette der Monotremata entspricht. Dieser mediale Rand liegt bei den Monotremata medialer vom Capitulum des Radius.

Die sekundäre Facette des Ellbogenknochens nimmt nicht allein in medialer Richtung an Grösse zu, sondern dehnt sich als kranzförmiger Fortsatz *processus coronoideus ulnae* (*p. cor. u.*). nach vorne aus. Damit im Zusammenhang bildet die Ulna eine besondere Bucht für das Capitulum des Radius [*incisura radialis* (*i. r.*)], welche aus zwei Teilen besteht: aus einem hinteren, durch den vorderen Rand der primären Facette der Ulna gebildeten [*pars posterior* (*p. i. r.*) und aus einem medialen, welcher durch den lateralen Rand (*m. l. p. cor. u.*) des kranzförmigen Fortsatzes gebildet ist [*pars medialis* (*m. i. r.*)].

Auf dem vorderen Innenwinkel des Radius erhebt sich eine kleine Erhöhung—der kranzförmige Fortsatz des Radius-*processus coronoideus radii* (*p. cor. r.*). Der laterale Rand des Capitulum des Radius bildet einen unbedeutenden äusseren Teil der primären Facette *(p. l.)*.

Wir finden also bei den Beuteltieren und auch bei der Mehrzahl der platzentalen Säugetie-

re am proximalen Ende der Ulna eine sekundäre Facette, welche dem medialen Rande der primären Facette des Ellbogenknochens der Monotremata entspricht und vorne in einen kranzförmigen Fortsatz ausläuft.

Am Humerus der Beuteltiere und Platzentalier bemerken wir folgende Bildungen: für das Capitulum des Radius ist der *condylus radialis* (*capitulum*) [Fig. 2, *B* и *C* (*c. r.*)] bestimmt, von dessen Aussenseite sich der Sattel *sella radialis* (*s. r.*) für den Aussenrand des Capitulum des Radius entwickelt. Für die sekundäre Facette des Ellbogenknochens und insbesondere für

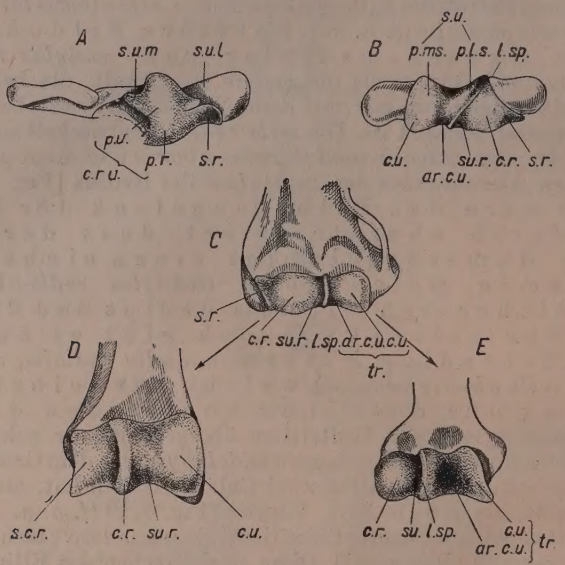


Fig. 2. Die distalen Enden des rechten Humerus:

A—Humerus der Echidna vom distalen Ende gesehen; *B*—Humerus des Didelphis ebenso; *C*—Humerus des Dideplhis von der Ventral-Beugeseite gesehen; *D*—Humerus des Alcers ebenso; *E*—Humerus des Homo ebenso.

ihren kranzförmigen Fortsatz bildet sich der *condylus ulnaris* (*c. u.*), von welchem man annehmen kann, dass er sich aus einer der *sella ulnaris medialis* der Monotremata entsprechenden Bildung entwickelt hat. Beide Gelenkköpfe werden durch die Radiusrinne *sulcus radialis* (*su. r.*) geteilt, in welcher der mediale Rand des Radius und sein kranzförmiger Fortsatz gleiten. Medial von der Rinne ist ein feiner erhabener Streifen [*linea spiralis* (*l. sp.*)] bemerkbar, welcher samt dem *sulcus radialis* von der vorderen Fläche des Oberarmknochens spiralförmig auf sein distales Ende und weiter auf die dorsale Seite zum äusseren proximalen Winkel des *condylus radialis* übergeht. Diese Linie an dem Humerus deutet die Grenze zwischen der Gelenkverbindung des Radius und der Ulna an. Medial von der *linea spiralis* sehen wir eine schmale Fläche, welche den Aussenrand des *condylus ulnaris* umgibt. Diese Fläche [*area condyli ulnaris* (*ar. c. u.*)] dient zum Gleiten des lateralen Randes des kranzförmigen Fortsatzes des Ellbogenknochens. Die Gelenksfläche am Humerus, die der primären und eigentlichen se.un-

dären Facette (des kranzlosen Fortsatzes) des Ellbogenknochens entspricht, bezeichne ich als Sattel des Ellbogenknochens *sella ulnaris* [Fig., 2, *B* (*s. u.*)]. Diesen Sattel kann man auch vom distalen Ende des Humerus sehen, noch besser von der dorsalen Seite, wo sich nur der Sattel befindet. Die *sella ulnaris* (*s. u.*) besteht aus zwei Abschnitten: aus der *pars lateralis* (*p. l. s.*), welche zur Gelenkbildung mit der primären Facette dient und der *pars medialis* (*p. m. s.*), die mit der sekundären Facette der Ulna gelenkt. Die der *pars ulnaris condyli radio-ulnaris* der Monotremata entsprechende, medial und teilweise auch dorsal vom *condylus radialis* gelagerte *pars lateralis* ist vom letzteren durch die *linea spiralis* (*l. sp.*) von aussen abgegrenzt. Die *pars medialis* (*p. m. s.*) geht ohne scharfe Grenzen in den *condylus ulnaris* (*c. u.*) über, was selbstverständlich ist, da die sekundäre Facette des Ellbogenknochens gleichfalls ohne scharfe Grenzen in den kranzförmigen Fortsatz übergeht, welcher den grössten Teil der *condylus ulnaris* einnimmt. Also behält bei den Beuteltieren und der Mehrzahl der Platzentalier die Ulna ihre Lage hinter dem Radius, jedoch schiebt sie sich teilweise in medialer Richtung längs dem distalen Rande des Humerus vor, indem sie die sekundäre Facette entwickelt.

Mit der Entwicklung des nach vorne gerichteten kranzförmigen Fortsatzes legt sich die Ulna mit diesem neu entstandenen Teile ihren Proximalendes medial vom Radius.

Ein ähnlicher Bau des Ellbogengelenkes ist für die Beuteltiere, die Mehrzahl der Nagetiere, Insectivora, Raubtiere, Affen, d. h. für diejenigen Formen charakteristisch, deren Radius die Fähigkeit besitzt, sich am *condylus radialis* um die Ulna herum zu drehen.

Bei höheren Primaten und bei den Menschen findet bei hoher Differenzierung im Ellbogen der Pronation- und Supinationbewegung eine maximale Befestigung des Ellbogenknochens als einer Achse im Gelenk statt, um welche sich die Drehung des Radius vollzieht.

Aus dem lateralen Rand des kranzförmigen Fortsatzes des Ellbogenknochens der längs der *area condyli ulnaris* [Fig. 2, *B* (*m. l. p. ccr. u.*)] gleitet, entwickelt sich die tertiäre Facette des Ellbogenknochens, *facies articularis ulnae tertia* [Fig. 1, *C* (*f. a. u. t.*)], welche sich in lateraler Richtung vergrössernd das *capitulum radii* nach aussen hin zurückdrängt. Der proximale Teil der tertiären Facette verschmilzt mit dem distalen Teile der primären Facette (*f. a. u. p.*), welche durch das Capitulum des Radius medial vom letztern nach aussen hin verdrängt wird und daher nicht wie früher hinter demselben gelagert ist. Auf diese Weise lagert sich die ganze Ulna medial vom Radius und verliert die *pars posterior incisurae radialis.*

Also stellt das Gelenk des Ellbogenknochens der höheren Primaten und des Menschen nicht eine sekundäre Facette, wie Tornier meinte, sondern drei Facetten dar: eine primäre, eine sekundäre und eine tertiäre.

Was in der Anatomie des Menschen die Rolle (*trochlea* [Fig. 2, *E* (*tr.*)] genannt wird, stellt ein Gebilde aus *condylus ulnaris* (*c. u.*), *area condyli ulnaris* (*a. c. u.*) und *sella ulnaris* (*s. u.*) dar. Dasselbe ist durch die Spirallinie (*l. sp.*) vom *sulcus radialis* (*su. r.*) vorzüglich abgeteilt. Der *condylus radialis* (*capitulum*) (*c. r.*) selbst, welchem der Sattel abhanden gekommen ist und welcher in lateraler Richtung von der vergrösserten *area condyli*

ulnaris (*ar. c. u.*) zurückgedrängt worden ist, lagert sich vollständig nach aussen hin von der Trochlea.

Bei Formen, welche die Fähigkeit zu Drehbewegungen des Vorderarms verloren haben, wie z. B. bei Huftieren, entwickelt sich aus dem medialen Rand der primären Facette des Radius [Fig. 1. *A. B. C. D.* (*f. a. r. s.*)] die sekundäre Facette (*facies articularis radii secunda*), welche einen immer grösseren Teil des *condylus ulnaris* einnimmt und den hier früher gelenkenden kranzförmigen Fortsatz der sekundären Facette der Ulna zurückdrängt. Auf diese Weise erweist sich die sekundäre Facette gleich der primären vollkommen hinter dem Radius liegend (Fig. 1, *D.*).

In Verbindung damit, dass der Ellbogengelenkkopf von der sekundären Facette des Radius eingenommen wird, verliert der Humerus der Huftiere am vorderen und distalen Rande seines Gelenkes die Spirallinie (die Grenze zwischen dem Gelenk des Radius und der Ulna), welche sich nur auf der Kaudalseite des Knochens erhält. Um der Drehung des Radius vorzubeugen, entwickeln sich am distalen Ende des Vorderarms Kämme und Rinnen. Das ist beispielsweise an dem Humerus des Elens gut zu sehen (Fig. 2*D*). Hier entwickelt sich stark die *sella condyli radialis* (*s. r.*), der *condylus radialis* (*c. r.*) selbst verwandelt sich in einen Kamm. Der *Sulcus radialis* (*su. r.*) und der *condylus ulnaris* (*c. u.*) bleiben ohne besondere Veränderungen. Äusserlich (Fig. 2D) gewinnt man den Eindruck, dass sich am Humerus des Elens das «Capitulum und die Trochlea» befinden. In der Tat aber ist das «Capitulum» vieler Huftiere nur ein Teil des *condylus radialis*, nämlich die *sella condyli radialis*, welche dem Menschen fehlt. Die «Trochlea» der Huftiere vereinigt *condylus ulnaris*, *sulcus radialis* und *condylus radialis*. Sie ist dem Capitulum und der Trochlea des Menschen gemeinsam homolog.

So ging also die Evolution des Ellbogengelenkes der Säugetiere von den Formen, welche die Fähigkeit, Drehbewegungen des Radius zu vollführen, nicht besessen hatten (Typus der Monotremata), durch Formen, welche diese Möglichkeit erhielten (Typus der Beuteltiere und die Mehrzahl der Platzentalier), einerseits zu Formen die diese Drehfähigkeit des Radius hypertrophiert (die höheren Primaten und der Mensch), und andererseits zu Formen, welche dieselbe sekundär verloren haben (Huftiere und viele Nagetiere), über.

Institut für Evolutionsmorphologie
und Paläozoologie.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.

Eingegangen
d. 2. VI. 1936

ZITIERTE LITERATUR

[1] W. Ellenberger u. H. Baum, Handbuch der vergleichenden Anatomie der Haustiere, Berlin (1926). [2] А. Ф. Климов, Конечности домашних животных, (1927). [3] Martins, Lehrbuch der Anatomie der Haustiere (1915). [5] Schmalz, Atlas der Anatomie des Pferdes, 1922—1924. [5] G. Tornier, Morph. Jahrb., **12** (1887). [6] J. Vermel, Morph. Jahrb. (Mitt. I, II, III und IV) **74** und **75**.